Жозефъ Бертранъ,

членъ Института и Французской Академіи, бывшій профессоръ Политехнической школы и Французской Коллегіи

АЛГЕБРА

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ,

пересмотрѣнная

ЖОЗЕФОМЪ БЕРТРАНОМЪ

и

ГЕНРИХОМЪ ГАРСЕ,

бывшимъ профессоромъ математическихъ наукъ въ лицеѣ Генриха IV

Переводъ съ послѣдняго (18-го) французскаго изданія

М. В. ПИРОЖКОВА

С.-ПЕТЕРБУРГЪ

Изданіе М. В. Пирожкова

1908

Типографія Ф. Вайсберга и П. Гершунина. Екатерин. кан. 71-б.

ПРЕДИСЛОВІЕ

Предлагаемое новое изданіе I-ой части Алгебры Бертрана представляетъ переводъ съ послѣдняго французскаго изданія безъ всякихъ измѣненій, сокращеній или добавленій.

Внесенныя мною въ предыдущемъ изданіи задачи сверхъ предложенныхъ Бертраномъ, а также рѣшенія собраны мною въ отдѣльной книжкѣ.

М. Пирожковъ

ОГЛАВЛЕНІЕ

СТРАН.

ПРЕДИСЛОВІЕ III
ОГЛАВЛЕНІЕ V
ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЯ ПОНЯТІЯ 1
Опредѣленіе алгебры (§ 1). 1
Употребленіе буквъ (§ 2). 1
Алгебраическіе знаки (§ 3). 1
Знаки, какъ средство для сокращенія (§ 4). 3
Буквы, какъ средство для обобщенія (§ 5). 3
Алгебраическія формулы (§ 6) 4
Польза формулъ (§ 7). 5
Классификація формулъ (§ 8). 7
Численное значеніе алгебраическаго выраженія (§ 9) 8
Подобные члены и ихъ приведеніе (§ 10). 9

КНИГА I.—Алгебраическое исчисленіе 10
Равносильныя выраженія (§ 11). 10
Алгебраическія дѣйствія (§ 12) 10

ГЛАВА ПЕРВАЯ.—**Алгебраическое сложеніе и вычитаніе** . . 10
I. Сложеніе и вычитаніе одночленовъ (§§ 13—14) 10
II. Сложеніе и вычитаніе многочленовъ (§§ 15—19) 11
III. Упрощеніе полученныхъ выводовъ (§§ 20—26) 14
УПРАЖНЕНІЯ 18

ГЛАВА ВТОРАЯ.—**Алгебраическое умноженіе** 19
Различные случаи умноженія (§ 27) 19
I. Умноженіе одночленовъ (§§ 28—29) 20
II. Умноженіе многочлена на одночленъ (§§ 30—31) 21
III. Умноженіе многочлена на многочленъ (§§ 32—42) 23
IV. Произведеніе многочленовъ, расположенныхъ по степенямъ какой-нибудь буквы (§§ 43—44) 30
V. Теоремы и приложенія (§§ 45—51) 33
УПРАЖНЕНІЯ 37

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—**Алгебраическое дѣленіе** 39
Выраженіе $\frac{A}{B}$ (§ 52) 39
Различные случаи дѣленія (§ 53) 39
I. Дѣленіе одночленовъ (§§ 54—56) 40
II. Дѣленіе многочлена на одночленъ (§§ 57—58) 41
III. Дѣленіе многочленовъ (§§ 59—60) 42

СТРАН.

IV. Дѣленія, которыя не могутъ быть выполнены точно (§§ 69—74) 51
V. Различіе и сходство дѣленія ариѳметическаго и дѣленія многочленовъ (§ 75) 54
VI. Теоремы и приложенія (§§ 76—80) 55
Упражненія 59
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.—Алгебраическія дроби. 60
Опредѣленія (§ 81) 60
I. Преобразованіе алгебраическихъ дробей (§§ 82—84) 60
II. Дѣйствія надъ алгебраическими дробями (§§ 85—88) 63
III. Отрицательные показатели (§§ 89—92) 66
IV. Теоремы и приложенія (§§ 93—94) 68
Упражненія 71
ГЛАВА ПЯТАЯ.—Алгебраическіе радикалы 72
Опредѣленія (§ 95) 72
Различныя значенія $\sqrt[m]{A}$ (§ 96) 73
I. Преобразованіе радикаловъ (§§ 97—100) 74
II. Дѣйствія надъ радикалами (§§ 101—104) 76
III. Дробные показатели (§§ 105—110) 79
IV. Приложенія (§ 111) 86
Упражненія 88
КНИГА II.—Уравненія первой степени 90
ГЛАВА ПЕРВАЯ.—Общіе принципы, относящіеся къ уравненіямъ, разсматриваемымъ отдѣльно 90
I. Опредѣленія (§§ 112—117) 90
II. Принципы (§§ 118—126) 91
ГЛАВА ВТОРАЯ.—Рѣшеніе уравненія первой степени съ одною неизвѣстною 97
I. Правило для рѣшенія уравненія (§§ 127—129) 97
II. Уравненія, приводимыя къ первой степени (§§ 129—131) . . 100
III. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ (§§ 132—135) 103
Упражненія 106
ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—Общіе принципы, относящіеся къ совмѣстнымъ уравненіямъ 108
I. Опредѣленія (§§ 136—137) 108
II. Принципы (§§ 138—141) 108
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.—Рѣшеніе системы уравненій первой степени, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ . 110
Когда можно опредѣлить нѣсколько неизвѣстныхъ (§ 142) . 110
I. Рѣшеніе системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными (§§ 143—143) 111
II. Рѣшеніе системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными (§§ 150—151) 115
III. Рѣшеніе какого-угодно числа уравненій первой степени (§§ 152—157) 117
IV. Упрощенія и различныя замѣчанія (§§ 158—159) 123
V. Случаи, когда число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій (§§ 160—161) 127

СТРАН.

VI. Случаи невозможности и неопредѣленности (§§ 162—163) . . 128
Упражнения 130
ГЛАВА ПЯТАЯ.—Рѣшеніе задачъ первой степени 133
Изъ сколькихъ частей состоитъ рѣшеніе задачи и что такое — задачи первой степени (§ 164) 133
I. Составленіе уравненій по условіямъ задачи (§§ 165—170) . . 133
II. Изслѣдованіе (§§ 171—174) 139
III. Отрицательныя рѣшенія задачъ первой степени съ одною неизвѣстною (§§ 175—186) 141
IV. Введеніе отрицательныхъ чиселъ въ условіе задачи (§ 187) . 148
V. Отрицательныя рѣшенія задачъ первой степени съ двумя неизвѣстными (§§ 188—191) 150
VI. Безконечныя и неопредѣленныя рѣшенія (§§ 192—198) . . . 152
Упражнения 157
ГЛАВА ШЕСТАЯ.—Неравенства 161
I. Принципы, относящіеся къ неравенствамъ, разсматриваемымъ отдѣльно (§§ 199—205) 161
II. Принципы, относящіеся къ совмѣстнымъ неравенствамъ (§§ 206—208) 165
III. Неравенства первой степени съ одною неизвѣстною (§§ 210—211) 168
Упражнения 169
ГЛАВА СЕДЬМАЯ.—Изслѣдованіе общихъ формулъ 171
I. Изслѣдованіе общей формулы рѣшенія уравненія первой степени съ одною неизвѣстной (§§ 212—213) 171
II. Полное изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными (§§ 214—223) . 172
III. Краткое изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными (§§ 224—227) . 179
IV. Изслѣдованіе задачи о курьерахъ (§§ 228—235) 183
Упражнения 188

КНИГА III.—Уравненія второй степени 190
ГЛАВА ПЕРВАЯ.—Уравненія второй степени съ одною неизвѣстною 190
Общій видъ уравненія съ одною неизвѣстною (§ 236) 190
I. Рѣшеніе уравненія второй степени (§§ 237—245) 191
II. Изслѣдованіе формулъ (§§ 246—250) 197
III. Свойства корней (§§ 291—259) 200
IV. Изслѣдованіе одного замѣчательнаго частнаго случая (§ 260). 205
V. Рѣшеніе уравненія: $ax^2+bx+c=0$, когда a — очень мало (§§ 261—264) 207
VI. Свойства трехчлена второй степени (§§ 265—271) 210
Упражнения 213
ГЛАВА ВТОРАЯ.—Уравненія съ одною неизвѣстною, приводящіяся къ уравненіямъ второй степени 216
I. Биквадратныя уравненія (§§ 272—276) 216
II. Нѣкоторыя двучленныя уравненія (§§ 277—278) 220
III. Трехчленныя уравненія (§ 279) 223
Упражнения 224

СТРАН.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—Уравненія со многими неизвѣстными . . . 227
I. Уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными (§§ 280—283) . . . 227
II. Уравненія второй степени болѣе, чѣмъ съ двумя неизвѣстными (§ 284) . . . 231
III. Уравненія степени выше второй (§ 285) . . . 233
Упражненія . . . 236
ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.—Рѣшеніе и изслѣдованіе задачъ степени выше первой . . . 240
I. Задачи съ одною неизвѣстною (§§ 286—290) . . . 240
II. Задачи съ несколькими неизвѣстными (§§ 291—298) . . . 249
Упражненія . . . 257
ГЛАВА ПЯТАЯ.—Нѣкоторые вопросы о maximum и minimum . 261
Опредѣленія (§ 299) . . . 261
Измѣненія, maximum и minimum функціи (§ 300) . . . 261
I. Maximum или minimum функціи отъ одной независимой перемѣнной (§§ 301—312) . . . 262
II. Maximum или minimum нѣкоторыхъ функцій степени выше второй (§§ 313—323) . . . 274
III. Maximum или minimum нѣкоторыхъ функцій отъ многихъ перемѣнныхъ (§§ 324—325) . . . 281
Упражненія . . . 285
КНИГА IV.—Прогрессіи и логариѳмы . . . 290
ГЛАВА ПЕРВАЯ.—Прогрессіи . . . 290
I. Ариѳметическія прогрессіи (§§ 326—335) . . . 290
II. Геометрическія прогрессіи (§§ 336—349) . . . 295
Упражненія . . . 302
ГЛАВА ВТОРАЯ.—Элементарная теорія логариѳмовъ . . . 305
I. Опредѣленія логариѳмовъ (§§ 350—357) . . . 305
II. Обобщенія, распространенныя на несоизмѣримыя числа (§§ 358—354) . . . 310
III. Свойства логариѳмовъ (§§ 365—371) . . . 313
IV. Устройство и расположеніе логариѳмическихъ таблицъ (§§ 372—376) . . . 315
V. Употребленіе логариѳмическихъ таблицъ (§§ 377—380) . . . 322
VI. Приложеніе теоріи логариѳмовъ (§§ 381—383) . . . 328
VII. Отрицательныя характеристики (§§ 384—388) . . . 331
VIII. Употребленіе дополненій (§§ 389—390) . . . 336
IX. Различныя системы логариѳмовъ (§§ 391—397) . . . 337
Упражненія . . . 340
ГЛАВА ТРЕТЬЯ.—Сложные проценты и срочныя (годовыя) уплаты . . . 341
I. Сложные проценты (§§ 389—402) . . . 341
II. Срочныя уплаты (§§ 403—409) . . . 348
Упражненія . . . 356

Предварительныя понятія

§ 1. Опредѣленіе алгебры. — *Алгебра* занимается *сокращеніемъ*, *упрощеніемъ* и въ особенности *обобщеніемъ* рѣшеній различныхъ вопросовъ относительно чиселъ.

Для достиженія этой цѣли алгебра употребляетъ *буквы* и *знаки*.

§ 2. Употребленіе буквъ. — Буквы въ алгебрѣ представляютъ собою числа и вмѣсто того, чтобы, какъ въ ариѳметикѣ, разсуждать и производить дѣйствія надъ числами заранѣе заданными, здѣсь разсуждаютъ и производятъ дѣйствія надъ буквами: a, b, c, . . . , x, y, . . . Поэтому *алгебраическія* доказательства и правила прилагаются безразлично ко всѣмъ числамъ и являются такимъ образомъ *общими*.

§ 3. Алгебраическіе знаки. — Такъ какъ числа должны здѣсь оставаться неопредѣленными, то самыхъ дѣйствій выполнять надъ ними нельзя уже будетъ и придется ограничиться только ихъ указаніемъ при помощи нѣкоторыхъ сокращенныхъ знаковъ.

Знаки, употребляемые въ алгебрѣ, слѣдующіе:

$+$ есть знакъ сложенія; онъ произносится *плюсъ*: $7 + 5$ обозначаетъ сумму двухъ чиселъ 7 и 5.

$-$ есть знакъ вычитанія; онъ произносится *минусъ*: $7 - 5$ обозначаетъ разность двухъ чиселъ 7 и 5.

$\times$ есть знакъ умноженія; онъ произносится *умноженное на*; 4×5 обозначаетъ произведеніе двухъ чиселъ 4 и 5. Вмѣсто этого знака употребляютъ также точку и пишутъ $4 . 5$. Знакъ умноженія совсѣмъ не ставятъ, если числа изображены буквами; множителей въ этомъ случаѣ пишутъ просто рядомъ, т.-е. пишутъ ab вмѣсто $a \times b$ или $a . b$. Опустить знакъ умноженія нельзя, если множители — численные: иначе вмѣсто произведенія, напр., 5×4 получится число 54.

: есть знакъ дѣленія и произносится *раздѣленное на*; $5 : 7$ обозначаетъ частное отъ дѣленія числа 5 на число 7. Вмѣсто этого

знака употребляютъ также горизонтальную черту и надъ нею пишутъ дѣлимое, а подъ нею дѣлителя; $\frac{5}{7}$ обозначаетъ частное отъ дѣленія числа 5 на число 7.

Когда множители равны между собою, то пишутъ только одного изъ нихъ, а надъ нимъ съ правой стороны ставятъ число, показывающее, сколько такихъ множителей нужно перемножить. Такимъ образомъ a^2 представляетъ произведеніе $a \times a$ или квадратъ a; a^3 представляетъ произведеніе $a \times a \times a$ или кубъ a; a^m представляетъ произведеніе m множителей, изъ которыхъ каждый равенъ a, или m-ую степень a. Число равныхъ множителей называется *показателемъ*.

$\sqrt{}$ обозначаетъ квадратный корень: $\sqrt{7}$ обозначаетъ квадратный корень изъ числа 7. Корень кубическій, четвертой степени и т. д. изъ числа a обозначаютъ черезъ $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$ и т. д. Если m — какое-нибудь цѣлое число, то $\sqrt[m]{a}$ обозначаетъ корень m-ой степени изъ a, т.-е. такое число, которое, будучи умножено само на себя $(m-1)$ разъ, дастъ a.

$=$ указываетъ на равенство выраженій, помѣщенныхъ справа и слѣва этого знака; $a=b$ показываетъ, что числа a и b равны между собою.

$>$ произносится *больше, чѣмъ*: $a>b$ показываетъ, что число a больше числа b.

$<$ произносится *меньше, чѣмъ*: $a<b$ показываетъ, что число a меньше числа b.

Выраженіе, заключенное въ скобки, разсматривается, какъ результатъ, получаемый послѣ выполненія всѣхъ тѣхъ дѣйствій, которыя указаны въ скобкахъ. Такъ, напр., выраженіе $19-(4+2-1)$ обозначаетъ избытокъ числа 19 надъ числомъ $(4+2-1)$, т.-е. надъ числомъ 5. Также выраженіе $(a+b)(c-d)$ обозначаетъ произведеніе суммы чиселъ a и b на разность чиселъ c и d.

Аналогичныя количества при рѣшеніи какого-нибудь вопроса обозначаются одними и тѣми же буквами съ однимъ или несколькими *значками* наверху или съ численными *указателями* внизу. Такимъ образомъ пишутъ: a, a', a'', a'''... и выговариваютъ: a, a со значкомъ, a съ двумя значками, a съ тремя значками, и т. д., или же пишутъ a, a_1, a_2, a_3, ... и выговариваютъ: a, a первое, a второе, a третье, и т. д.

Покажемъ теперь на нѣсколькихъ примѣрахъ, какъ употребленіе буквъ и знаковъ сокращаетъ и обобщаетъ рѣшенія.

§ 4. Знаки, какъ средство для сокращенія. — *Требуется раздѣлить 540 франковъ между тремя лицами такъ, чтобы часть перваго превышала часть второго на 48 фр., а часть второго превышала часть третьяго на 75 фр.*

Задача была бы рѣшена, если бы извѣстна была часть третьяго, потому что часть второго равна части третьяго, увеличенной на 75 фр., а часть перваго, будучи больше части второго на 48 фр., будетъ равна той же части третьяго, но увеличенной на 75 фр. и на 48 фр., т.-е. всего на 123 фр. — Слѣдовательно, всѣ три части вмѣстѣ равны части третьяго, повторенной три раза, плюсъ 75 фр. и 123 фр., т.-е. плюсъ 198 фр. А такъ какъ для дѣленія между тремя лицами дано было 540 фр., то, вычитая изъ этой суммы 198 фр., получимъ часть третьяго, повторенную три раза, именно 342 фр. Часть третьяго равна одной трети отъ 342 фр., т.-е. 114 фр. — Отсюда заключаемъ, что часть второго, будучи больше части третьяго на 75 фр., равна 189 фр., а часть перваго, будучи больше части второго на 48 фр., равна 237 фр.

Для повѣрки замѣчаемъ, что сумма чиселъ 237, 189 и 114 равна точно 540.

Введемъ теперь знаки, обозначивъ черезъ x часть третьяго, и составимъ слѣдующую таблицу:

Часть третьяго лица x
Часть второго „ . . . . $x + 75$
Часть перваго „ . . . . $x + 75 + 48$ или $x + 123$
Сумма всѣхъ трехъ частей $x + x + 75 + x + 123$ или $3x + 198$
Имѣемъ . . . . $3x + 198 = 540$.

Если отъ этихъ двухъ равныхъ количествъ отнять по 198, то остатки получимъ также равные, т.-е.

$$3x = 540 - 198 \text{ , или } 3x = 342,$$

откуда

$$x = \frac{342}{3}, \text{ или } x = 114.$$

На этомъ примѣрѣ видно, какъ знаки и буква x, введенная для обозначенія неизвѣстной части 3-го лица, сокращаютъ и облегчаютъ рѣшеніе задачи.

5. Буквы, какъ средство для обобщенія. — По только-что изложенному методу мы получаемъ рѣшеніе лишь для отдѣльнаго случая

и не можемъ судить, какія для этого дѣйствія необходимо было выполнить надъ данными задачи: и если бы намъ пришлось рѣшать подобную же задачу, но съ другими заданными числами, мы должны были бы вновь привести тѣ же самыя разсужденія и выполнить такія же вычисленія, чтобы получить новое рѣшеніе. Но если мы данныя обозначимъ буквами, то вычисленія уже не могутъ быть выполнены, и полученный результатъ укажетъ намъ путь для рѣшенія всѣхъ численныхъ задачъ подобнаго рода.

Въ самомъ дѣлѣ, обращаясь къ предыдущей задачѣ, обозначимъ буквою n число, которое требуется раздѣлить, черезъ d_1 — избытокъ первой части надъ второю, и черезъ d_2 — избытокъ второй части надъ третьею. Повторяя разсужденія § 4-го, напишемъ слѣдующую таблицу·

Часть третьяго лица x
Часть второго „ . . . . $x + d_2$
Часть перваго „ . . . . $x + d_2 + d_1$
Сумма всѣхъ трехъ частей . . . . $3x + 2d_2 + d_1$
Имѣемъ . . . . $3x + 2d_2 + d_1 = n$.

Если отъ этихъ двухъ равныхъ количествъ отнять по d_1 и по $2d_2$, то получимъ остатки также равные, т.-е.

$$3x = n - d_1 - 2d_2;$$

дѣля же эти остатки на 3, можемъ написать:

$$x = \frac{n - d_1 - 2d_2}{3}. \qquad (1)$$

Полученный результатъ показываетъ, что *для полученія части третьяго лица необходимо изъ числа, даннаго для раздѣленія, вычесть послѣдовательно избытокъ части перваго надъ частью второю и удвоенный избытокъ части второго надъ частью третьяго и полученный остатокъ раздѣлить на 3.*

Такимъ образомъ мы получили *общее правило* для рѣшенія всѣхъ задачъ подобнаго рода, т.-е. такихъ, текстъ которыхъ остается тотъ же самый, а измѣняются только: число, даваемое для раздѣленія, и числа, выражающія послѣдовательныя разности всѣхъ трехъ частей.

§ 6. Алгебраическія формулы. — Выраженія, показывающія, какія дѣйствія необходимо выполнить для рѣшенія вопроса, когда задан-

ныя числа представлены буквами, называются *формулами*. Къ нимъ принадлежитъ выраженіе (1).

Иногда говорятъ, что алгебра есть *наука о формулахъ*.

§ 7. Польза формулъ. — Выгода формулъ очевидна, такъ какъ одна общая формула заключаетъ въ себѣ безчисленное множество частныхъ случаевъ. Не безполезно однако показать выгодность формулъ и въ другихъ отношеніяхъ.

Во-первыхъ, при помощи формулъ общія теоремы являются въ значительно сокращенномъ видѣ и поэтому легче удерживаются въ памяти. Такъ, напр., вмѣсто того, чтобы говорить: *Сумма двухъ чиселъ не измѣняется, въ какомъ бы порядкѣ ни производить сложеніе; произведеніе двухъ множителей не измѣняется отъ ихъ перестановки; чтобы перемножить двѣ степени одного и того же числа, достаточно сложить ихъ показателей* говорятъ и пишутъ:

$$a + b = b + a,\ ab = ba,\ a^m \times a^n = a^{m+n}.$$

Для всякаго, знакомаго съ алгебраическимъ языкомъ, три послѣднія формулы такъ же ясно говорятъ, въ чемъ состоятъ теоремы, какъ и три предыдущія фразы.

Во-вторыхъ, употребленіе формулъ упрощаетъ доказательство теоремъ:

Примѣръ. — *Тѣло движется равномѣрно со скоростью v, т.-е. путь, проходимый имъ въ единицу времени, есть v; какой путь x пройдетъ тѣло въ теченіе промежутка t?*

Изъ опредѣленія равномѣрнаго движенія слѣдуетъ, что пройденныя пространства пропорціональны временамъ; поэтому пишемъ:

$$\frac{x}{v} = \frac{t}{1}.$$

Послѣ приведенія къ одному знаменателю заключаемъ, что

$$x = vt, \tag{2}$$

что и требовалось найти.

Непосредственно отсюда можно вывести двѣ новыя формулы:

$$v = \frac{x}{t}, \quad (3) \qquad t = \frac{x}{v}. \quad (4)$$

Формула (2) дѣлаетъ очевидными слѣдующія теоремы:

Въ равномѣрномъ движенiи пространство, проходимое въ данное время, пропорцiонально скорости; при данной скорости оно пропорцiонально времени; и, вообще, оно равно произведенiю времени на скорость.

Изъ формулы (3) выводимъ слѣдующiя теоремы:

Въ равномѣрномъ движенiи скорость пропорцiональна пространству, проходимому въ данное время; она находится въ обратномъ отношенiи къ времени, потраченному на прохожденiе даннаго пространства; и, вообще, она равна отношенiю пройденнаго пространства ко времени, потраченному на прохожденiе этого пространства.

Наконецъ, изъ формулы (4) заключаемъ:

Время, потраченное на прохожденiе даннаго пространства, обратно пропорцiонально скорости; при данной скорости время пропорцiонально проходимому пространству; и, вообще, время равно отношенiю пройденнаго пространства къ скорости движущагося тѣла.

Каждая изъ этихъ теоремъ потребовала бы отдѣльнаго доказательства, болѣе или менѣе подробнаго, если бы къ нимъ подходить непосредственно *); формулы (2), (3) и (4) дѣлаютъ ихъ очевидными для всѣхъ, знакомыхъ съ общепринятыми обозначенiями и съ величинами прямо и обратно пропорцiональными. (См. *Ариометику*).

Приведемъ другой примѣръ. Въ геометрiи доказываются слѣдующiя теоремы:

1. Двѣ окружности относятся между собою, какъ ихъ радiусы: другими словами, существуетъ между окружностью C и ея радiусомъ R постоянное отношенiе 2π, и, слѣдовательно, мы можемъ написать такую формулу:

$$C = 2\pi R \tag{5}$$

2. Площади двухъ круговъ относятся между собою, какъ квадраты ихъ радiусовъ.

3. Площадь круга измѣряется произведенiемъ его окружности на половину радiуса: другими словами, площадь круга S измѣряется произведенiемъ $C \times \frac{R}{2}$, и мы имѣемъ:

$$S = C \times \frac{R}{2} = 2\pi R \times \frac{R}{2} = \pi R^2. \tag{6}$$

---

*) Галилей, не употреблявшiй формулъ, посвятилъ 4 страницы этимъ теоремамъ (*Giornata terza, de Motu aequabili*).

Изъ послѣдней формулы усматривается непосредственно вторая изъ приведенныхъ теоромъ, что *площадь круга пропорціональна квадрату радіуса.* Можно было бы и совсѣмъ не приводить второй теоремы; по крайней мѣрѣ, нѣтъ необходимости доказывать ее отдѣльно, разъ выведена формула (6).

Если ограничиться изложеніемъ теоремъ, не приводя слѣдствій, выраженныхъ формулами, то зависимость между теоремами могла бы отъ насъ ускользнуть.

§ 8. Классификація формулъ. — *Алгебраическимъ выраженіемъ* или *количествомъ* называютъ совокупность буквъ и чиселъ, соединенныхъ между собою знаками дѣйствій. Алгебраическія выраженія могутъ заключать въ себѣ шесть дѣйствій: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень и извлеченіе корней. Такъ, напр.,

$$\frac{13a^2b(2c+d)\sqrt{y}}{a\sqrt{b}}$$

есть алгебраическое выраженіе.

Алгебраическое выраженіе считается *раціональнымъ*, если въ него не входитъ извлеченіе корней. Изъ двухъ выраженій:

$$\frac{7(x+3)(2a+b)}{5c}, \quad \sqrt[3]{a^2+b^2} - \sqrt{a+b+c+k}$$

первое будетъ раціональнымъ, а второе—*ирраціональнымъ*.

Такое алгебраическое выраженіе, куда не входитъ дѣленіе, называется *цѣлымъ*. Изъ двухъ выраженій:

$$15(a+b)c^2, \quad \frac{a^3-b}{a^2+b^2+c^2}$$

первое будетъ цѣлымъ, а второе—*дробнымъ*.

Такое алгебраическое выраженіе, куда не входитъ ни сложеніе, ни вычитаніе, называется *одночленомъ*. Напр., выраженія: $13a^3b^4c$, $\frac{3}{4}x^2y$ суть одночлены.

Въ одночленѣ различаютъ *коэффиціентъ*, буквы и показатели послѣднихъ. Коэффиціентомъ называется численный множитель, помѣщаемый впереди и относящійся ко всему выраженію. Въ вышеприведенныхъ примѣрахъ 13 и $\frac{3}{4}$ суть коэффиціенты, показываю-

щіе, что количества a^3b^4c и x^2y должны быть умножены соотвѣтственно на 13 и на $\frac{3}{4}$. Показатель относится только до той буквы, надъ которою стоитъ. Такъ, напр., выраженіе $13a^3b^4c$ обозначаетъ произведеніе:

$$a \times a \times a \times b \times b \times b \times b \times c \times 13.$$

Одночленъ, передъ которымъ не поставлено коэффиціента, долженъ быть разсматриваемъ какъ такой, у котораго коэффиціентъ 1. Также, если надъ буквою не поставлено показателя, подразумѣвается показатель 1.

Нѣсколько одночленовъ, соединенныхъ знаками $+$ или $-$, составляютъ *многочленъ* или *полиномъ*, а самые одночлены называются *членами* многочлена. Обыкновенно члены многочлена читаются съ тѣмъ знакомъ, который стоитъ передъ ними. Напр., въ многочленѣ:

$$8x^3 - 5ax^2 + 6a^2x - 4a^3$$

отдѣльные члены будутъ: $8x^3$, $-5ax^2$, $+6a^2x$, $-4a^3$.

Членъ безъ знака впереди долженъ быть разсматриваемъ какъ такой, у котораго впереди стоитъ $+$. Члены со знакомъ $+$ впереди называются *положительными*, а со знакомъ $-$ впереди—*отрицательными*.

Многочленъ, состоящій изъ двухъ членовъ, называется *двучленомъ* или *биномомъ*; состоящій изъ трехъ членовъ называется *трехчленомъ*, и т. д.

Измѣреніемъ или *степенью* цѣлаго одночлена называется сумма показателей буквъ, входящихъ въ него. Такъ, напр., выраженіе $7a^3b^2c$ есть одночленъ 6-го измѣренія или 6-ой степени.

Если всѣ члены многочлена одной степени, то такой многочленъ называется *однороднымъ*, а показатель степени — *степенью однородности* многочлена. Такъ, напр., выраженіе: $5x^4 - 3abx^2 + 4ac^2x - 2a^2bc$ есть однородный многочленъ 4-ой степени.

§ 9. *Численное значеніе* алгебраическаго выраженія есть число, которое получится, если вмѣсто буквъ подставить туда ихъ численныя значенія и выполнить всѣ дѣйствія, указанныя знаками.

Привести къ числу алгебраическое выраженіе значитъ найти его численное значеніе.

Изъ этого опредѣленія слѣдуетъ, что можно разсматривать численное значеніе многочлена, какъ разность между суммою числен-

ныхъ значеній членовъ, передъ которыми стоитъ знакъ $+$, и суммою численныхъ значеній членовъ, передъ которыми стоитъ знакъ $-$.

Если бы вторая сумма превысила первую, то многочленъ потерялъ бы свое значеніе. Вскорѣ увидимъ, какъ приходится разсматривать подобные результаты.

§ 10. Подобные члены и ихъ приведеніе. — Члены многочлена называются *подобными*, если составлены изъ однѣхъ и тѣхъ же буквъ съ одними и тѣми же показателями, какъ напр., члены $+15a^3b^2c$ и $7a^3b^2c$. Два подобныхъ члена могутъ различаться только коэффицентами и знаками.

Можно всегда привести нѣсколько подобныхъ членовъ къ одному. Въ самомъ дѣлѣ, если въ многочленѣ будетъ два положительныхъ подобныхъ члена, напр., $+7a^2b+9a^2b$, то ихъ можно замѣнить однимъ членомъ $+16a^2b$. Если встрѣтится два отрицательныхъ подобныхъ члена, напр., $-7a^2b-9a^2b$, то ихъ можно замѣнить однимъ членомъ $-16a^2b$. Если оба подобныхъ члена со знаками противоположными, напр., $+9a^2b-7a^2b$, то эта разность равносильна $+2a^2b$. Если же встрѣтится выраженіе $+7a^2b-9a^2b$, то, очевидно, его можно замѣнить членомъ $-2a^2b$.

Итакъ, *чтобы привести нѣсколько подобныхъ членовъ къ одному, составляютъ сумму коэффиціентовъ членовъ со знакомъ $+$, затѣмъ сумму коэффиціентовъ членовъ со знакомъ $-$; послѣ этого вычитаютъ меньшую сумму изъ большей и передъ полученнымъ остаткомъ ставятъ знакъ этой послѣдней. Наконецъ, къ полученному такимъ образомъ коэффиціенту приписываютъ буквенное выраженіе, общее всѣмъ членамъ.*

Напримѣръ, многочленъ:

$$5a^3b^2+12a^3b^2-6a^3b^2-a^3b^2-4ab^3-7ab^3+2ab^3$$

приводится къ двучлену:

$$10a^3b^2-9ab^3.$$

КНИГА I

Алгебраическое исчисление

§ 11. Равносильныя выраженія. — Говорятъ, что два алгебраическихъ выраженія *равносильны*, если послѣ замѣны каждой изъ буквъ въ нихъ входящихъ какими нибудь частными значеніями, произвольно выбранными, мы будемъ получать каждый разъ одинаковыя численныя значенія Такъ, напр., два выраженія: $(a+b)^2$ и $a^2+2ab+b^2$ будутъ равносильными.

§ 12. Алгебраическія дѣйствія. — Такъ какъ всякое алгебраическое количество должно быть разсматриваемо, какъ число, то *алгебраическія дѣйствія* опредѣляютъ такъ же, какъ въ ариѳметикѣ. Но за то, съ другой стороны, эти дѣйствія невозможно довести до конца, какъ въ ариѳметикѣ, потому что они производятся надъ буквами, и поэтому приходится ограничиться только ихъ указаніемъ.

Точно также и *алгебраическое исчисленіе состоитъ* только *въ преобразованіи одной формулы въ другую, ей равносильную, но болѣе простую.*

Напр., когда замѣняютъ произведеніе $a^2\times a^3$ одночленомъ a^5, или $\sqrt{a^2+2ab+b^2}$ черезъ $a+b$, то производятъ такъ называемое алгебраическое дѣйствіе: иногда говорятъ въ этомъ случаѣ, что *умножили* a^2 на a^3 или *извлекли квадратный корень* изъ $a^2+2ab+b^2$.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Алгебраическое сложеніе и вычитаніе

I. Сложеніе и вычитаніе одночленовъ

§ 13. Правило сложенія одночленовъ. — *Чтобы сложить одночлены, пишутъ ихъ рядомъ, отдѣляя другъ отъ друга знакомъ* $+$. Полу-

чается такимъ образомъ многочленъ, который и есть искомая *сумма*; если есть въ немъ подобные члены, то дѣлаютъ приведенie (§ 10).

Примѣръ. — Сумма одночленовъ.

$$4a,\ 3b,\ 5c,\ 2a,\ 6b,\ 8c$$

есть

$$4a + 3b + 5c + 2a + 6b + 8c,$$

что приводится къ

$$6a + 9b + 13c.$$

§ 14. Правило вычитанія одночленовъ. — *Чтобы вычесть одинъ одночленъ изъ другого, пишутъ первый послѣ второго, раздѣляя ихъ знакомъ* —. **Получается такимъ образомъ двучленъ, который и есть искомая *разность*. Если оба члена этого двучлена подобны, то онъ приводится къ одночлену.**

Примѣры:

1) Разность одночленовъ:

$$\sqrt{7a} \text{ и } \sqrt[3]{3b} \text{ есть } \sqrt{7a} \quad \sqrt[3]{3b}.$$

2) Разность одночленовъ:

$$8a^4b^3c \text{ и } 5a^4b^3c \text{ есть } 8a^4b^3c - 5a^4b^3c,$$

что приводится къ

$$3a^4b^3c.$$

Эти два алгебраическихъ дѣйствія, наиболѣе простыя изъ всѣхъ остальныхъ, не допускаютъ дальнѣйшихъ упрощенiй.

II. Сложенie и вычитанie многочленовъ

§ 15. Принципы сложенія и вычитанія многочленовъ. — Сложенie и вычитанie многочленовъ покоится на нѣсколькихъ принципахъ, изъ которыхъ почти всѣ очевидны. Эти принципы слѣдующie:

1. *Сумма не измѣняется, въ какомъ бы порядкѣ ни производить сложенie ея различныхъ частей.*

2. *Численное значенie многочлена не измѣняется, въ какомъ бы порядкѣ ни были написаны его члены.* **Въ самомъ дѣлѣ, во всѣхъ случаяхъ оно будетъ равно избытку суммы членовъ со знакомъ + надъ суммою членовъ со знакомъ — (§ 9).**

3. *Чтобы прибавить къ нѣкоторому числу сумму нѣсколькихъ другихъ, достаточно прибавить къ нему послѣдовательно каждое изъ этихъ другихъ.*

4. *Чтобы прибавить къ нѣкоторому числу разность двухъ другихъ, достаточно прибавить къ нему первое и изъ полученнаго результата вычесть второе.*

5. *Чтобы вычесть изъ нѣкотораго числа сумму нѣсколькихъ другихъ, достаточно вычесть изъ него послѣдовательно каждое изъ этихъ другихъ.*

6. *Чтобы вычесть изъ нѣкотораго числа a разность $(b-c)$ двухъ другихъ, необходимо прибавить къ нему второе число c и изъ результата вычесть первое b.* Въ самомъ дѣлѣ, разность двухъ чиселъ: a и $(b-c)$ не измѣнится, если прибавить по одному и тому же числу c къ уменьшаемому и къ вычитаемому. Избытокъ числа a надъ числомъ $(b-c)$ равенъ, слѣдовательно, избытку числа $(a+c)$ надъ числомъ b, т.-е. онъ будетъ $(a+c-b)$.

Эти принципы выражаются слѣдующими формулами:

$$a+b+c+d=d+c+b+a; \qquad (1)$$

$$a-b+c-d=c+a-b-d; \qquad (2)$$

$$a+(b+c+d)=a+b+c+d; \qquad (3)$$

$$a+(b-c)=a+b-c; \qquad (4)$$

$$a-(b+c)=a-b-c; \qquad (5)$$

$$a-(b-c)=a+c-b; \qquad (6)$$

На основаніи ихъ мы можемъ дать слѣдующія правила:

§ 16. Правило сложенія многочленовъ. — *Чтобы прибавить многочленъ къ нѣкоторому числу, необходимо прибавить къ нему всѣ члены со знакомъ $+$, и вычесть изъ результата всѣ члены со знакомъ $-$.*

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, требуется прибавить къ числу P многочленъ:

$$a-b+c-d-e+f,$$

т.-е. выполнить дѣйствіе:

$$P+(a-b+c-d-e+f).$$

Нашъ многочленъ по второму принципу (§ 15) можетъ быть написанъ такъ:

$$a+c+f-b-d-e.$$

что равносильно по 5-му принципу выраженію:

$$(a + c + f) - (b + d + e).$$

Слѣдовательно, требуемая сумма будетъ:

$$P + [(a + c + f) - (b + d + e)].$$

По 4-му же принципу эта послѣдняя сумма равносильна

$$P + (a + c + f) - (b + d + e)$$

или, принимая во вниманіе третій и пятый принципы, можемъ сказать, что послѣднее выраженіе равносильно

$$P + a + c + f - b - d - e.$$

Полученный результатъ и есть какъ разъ то, что требовалось доказать.

§ 17. Правило вычитанія многочленовъ. — *Чтобы вычесть изъ нѣкотораго числа многочленъ, необходимо къ этому числу прибавить всѣ члены, стоящіе въ многочленѣ со знакомъ —, и изъ результата вычесть всѣ остальные члены многочлена.*

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, требуется вычесть изъ P многочленъ:

$$a - b + c - d - e + f,$$

т.-е. выполнить дѣйствіе:

$$P - (a - b + c - d - e + f).$$

Нашъ многочленъ по второму и пятому принципамъ равенъ выраженію:

$$(a + c + f) - (b + d + e);$$

слѣдовательно, требуемая разность будетъ:

$$P - [(a + c + f) - (b + d + e)].$$

Въ свою очередь на основаніи 6-го, 3-го и 5-го принциповъ можемъ написать:

$$P - [a + c + f) - (b + d + e)] = P + (b + d + e) - (a + c + f) =$$
$$= P + b + d + e - a - c - f,$$

что и требовалось доказать.

§ 18. Замѣчаніе.—Такъ какъ порядокъ, въ какомъ писать члены многочлена, по 2-му принципу является безразличнымъ, то предыдущія правила можно высказать и такъ:

Чтобы прибавить многочленъ къ нѣкоторому числу P, необходимо написать всѣ его члены послѣ P вмѣстѣ съ ихъ знаками.

Чтобы вычесть многочленъ изъ нѣкотораго числа P, необходимо написать всѣ его члены послѣ P, измѣнивъ знакъ у каждаго изъ нихъ.

При томъ, если встрѣтятся подобные члены, слѣдуетъ сдѣлать приведеніе.

§ 19. Примѣры на эти два дѣйствія.—На практикѣ, если многочлены, надъ которыми производятъ дѣйствія, содержатъ подобные члены, ихъ пишутъ одинъ подъ другимъ такъ, чтобы подобные члены стояли въ одномъ и томъ же вертикальномъ столбцѣ; и тогда заразъ производятъ какъ самое дѣйствіе, такъ и приведеніе.

Примѣры:

1) Выполнить сложеніе:

$$(4x^3 - 5a^2x - 8a^3 - 4ax^2) + (2a^2x - 3x^3 + 7a^3) + (9a^3 - 5ax^2 + 5x^3).$$

Переставивъ надлежащимъ образомъ члены, пишутъ:

$$\begin{array}{rrrr} 4x^3 & -\,4ax^2 & -\,5a^2x & -\,8a^3 \\ -\,3x^3 & & +\,2a^2x & +\,7a^3 \\ 5x^3 & -\,5ax^2 & & +\,9a^3 \end{array}$$

и получаютъ:

$$6x^3 - 9ax^2 - 3a^2x + 8a^3.$$

2) Выполнить вычитаніе.

$$(7a^3b - 8a^2b^2 + 5a^4 - 2b^4) - (2a^4 - 4ab^3 + 4a^3b - 2b^4).$$

Измѣнивъ знаки у членовъ второго многочлена, пишутъ:

$$\begin{array}{rrrrr} 5a^4 & +\,7a^3b & -\,8a^2b^2 & & -\,2b^4 \\ -\,2a^4 & -\,4a^3b & & +\,4ab^3 & +\,2b^4 \end{array}$$

и получаютъ:

$$3a^4 + 3a^3b - 8a^2b^2 + 4ab^3$$

III. Упрощеніе полученныхъ выводовъ

§ 20. Условія, на которыхъ вводятъ отрицательныя числа, чтобы упростить изложеніе теоремъ. — Текстъ полученныхъ выводовъ можетъ быть упрощенъ при помощи одного соглашенія, весьма полезнаго въ алгебрѣ. Это соглашеніе состоитъ въ томъ, чтобы *разсматривать всѣ члены—какъ положительные, такъ и отрицательные* (§ 8)*—какого-нибудь многочлена, какъ слагаемыя.*

Такимъ образомъ, *разность* $a - b$ *придется разсматривать, какъ результатъ сложенія* a *съ* $(-b)$, т.-е.

$$a - b = a + (-b). \tag{1}$$

Выраженіе $(-b)$, взятое отдѣльно и называемое *отрицательнымъ* числомъ, не пріобрѣтаетъ отъ этого никакого новаго значенія; только, вмѣсто того чтобы говорить: *вычесть* b, говорятъ: *прибавить* $(-b)$.

Согласились также, что *вычесть* $(-b)$ все равно, что *прибавить* b, т.-е.

$$a - (-b) = a + b. \tag{2}$$

Было бы абсурдомъ искать доказательства для формулъ (1) и (2): опредѣленія не доказываются. Необходимо, однако, замѣтить, что соглашеніе, выраженное формулою (2), есть естественное слѣдствіе перваго. Въ самомъ дѣлѣ, если къ a прибавить $(-b)$, то получимъ по первому соглашенію выраженіе $a - b$; если же теперь отнять отъ полученнаго результата $(-b)$, то по второму соглашенію получимъ $a - b + b$ или просто a. Эти два дѣйствія уничтожаютъ такимъ образомъ другъ друга, что и должно было случиться. Но если не сдѣлать второго соглашенія, то къ числу a прибавивъ сначала, а затѣмъ отъ полученнаго результата отнявъ одно и то же число $(-b)$, мы все-таки не получили бы числа a. Это новое соглашеніе необходимо, разъ принято первое.

§ 21. Общее правило сложенія. — Эти два соглашенія даютъ возможность высказать правило сложенія въ слѣдующей формѣ:

Чтобы сложить два многочлена, слѣдуетъ **прибавить** *къ первому всѣ члены второго, каковы бы ни были ихъ знаки.*

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, даны два многочлена:

$$a + b + c, \quad m - n + p - q;$$

сумма ихъ будетъ (§ 18):

$$a - b + c + m - n + p - q,$$

а принимая во вниманіе наши соглашенія, полученный многочленъ можемъ переписать въ такомъ видѣ:

$$a - b + c + m + (-n) + p + (-q),$$

что и согласно съ общимъ правиломъ сложенія.

22. Общее правило вычитанія. Тѣ же соглашенія даютъ возможность высказать правило вычитанія въ слѣдующей формѣ:

Чтобы вычесть нѣкоторый многочленъ изъ какого-нибудь количества A, слѣдуетъ **вычесть** *послѣдовательно всѣ его члены, каковы бы ни были ихъ знаки.*

Пусть, въ самомъ дѣлѣ, требуется вычесть изъ A многочленъ $m - n - p + q$; извѣстно (§ 18), что разность будетъ:

$$A - m + n + p - q,$$

а этотъ результатъ, принимая во вниманіе наши соглашенія, равносиленъ выраженію:

$$A - m - (-n) - (-p) - q,$$

что и согласно съ общимъ правиломъ вычитанія.

§ 23. Замѣчаніе. — Введеніе отрицательныхъ чиселъ даетъ возможность добытые выводы изложить болѣе сжато, не прибавляя этимъ, впрочемъ, ничего новаго. Далѣе мы увидимъ, что цѣль введенія въ алгебру отрицательныхъ чиселъ всегда будетъ такова *).

§ 24. Новое соглашеніе. — Разность $(a - b)$ не можетъ быть получена, если b больше a; *въ такомъ случаѣ условливаются разсматривать выраженіе $(a - b)$, какъ отрицательное число, равное избытку b надъ a*, т.-е.

$$a - b = -(b - a). \qquad (3)$$

Это послѣднее соглашеніе вполнѣ естественно, и, не сдѣлавъ его, мы нарушили бы то полное сходство, которое наблюдается въ дѣйствіяхъ: съ одной стороны, надъ числами положительными, а съ другой—надъ числами отрицательными. Въ самомъ дѣлѣ, обозначивъ черезъ d избытокъ b надъ a, т.-е. написавъ:

$$a - b = a - (a + d)$$

и приложивъ правило вычитанія (§ 22), получимъ:

$$a - b = a - (a + d) = a - a - d = -d = -(b - a).$$

*) Всѣ предыдущія объясненія совершенно необходимы: они показываютъ, что здѣсь идетъ рѣчь совсѣмъ не о томъ употребленіи отрицательныхъ чиселъ, какъ нѣкоторыхъ величинъ, которое встрѣтится намъ только при рѣшеніи задачъ первой степени.

Такимъ образомъ мы показываемъ, насколько естественно ввести это новое соглашеніе, но послѣднимъ разсужденіемъ мы ничуть не *доказываемъ* формулы (3). Въ самомъ дѣлѣ, разсужденіе наше основано на приложеніи правила вычитанія (**§ 22**), даннаго лишь на тотъ случай, когда самое вычитаніе возможно. Естественно и удобно распространить его на всѣ случаи, отъ чего оно все-таки не становится менѣе произвольнымъ

§ 25. Обобщеніе нѣкоторыхъ выводовъ. — Только-что введенное соглашеніе даетъ возможность обобщить нѣкоторые выводы, которые безъ этого пришлось бы принимать съ ограниченіями: напримѣръ, формулу (4) **§ 15**-го:

$$c + (a - b) = c + a - b.$$

Эта формула очевидна въ томъ случаѣ, когда a больше b. Наше соглашеніе дѣлаетъ ее справедливою во всѣхъ случаяхъ: въ самомъ дѣлѣ, если a меньше b, то по **§ 24**-му имѣемъ:

$$a - b = -(b - a),$$

а въ такомъ случаѣ, примѣняя послѣдовательно первое соглашеніе **§ 20**-го и шестой принципъ **§ 15**-го, получимъ:

$$c + (a - b) = c - (b - a) = c + a - b.$$

Также въ силу нашихъ соглашеній является справедливою и формула:

$$c - (a - b) = b + (c - a)$$

при $a < b$ и $c < a$. Въ самомъ дѣлѣ, на основаніи соглашенія (**§ 24**)

$$a - b = -(b - a).$$

Прилагая же 2-ое соглашеніе **§ 20**-го и затѣмъ 4-й и 2-й принципы **§ 15**-го, получаемъ:

$$c - (a - b) = c + (b - a) = c + b - a = b + c - a.$$

Съ другой же стороны, въ силу предыдущихъ соглашеній [**§ 24**, **§ 20** (1), **§ 15** (6)] при c меньшемъ, чѣмъ a, можемъ написать:

$$b + (c - a) = b - (a - c) = b + c - a.$$

Слѣдовательно,

$$c - (a - b) = b + (c - a).$$

Если даже представить отрицательное количество буквою m, т.-е. *не вводя знака—явнымъ образомъ*, то формулы сложенія и вычитанія все-таки останутся въ силѣ, т.-е. будутъ:

$$A + (-m) = A - m, \quad A - (-m) = A + m,$$

потому что, полагая $m = -n$, гдѣ n положительное, получаемъ:

$$A - m = A - (-n) = A + n = A + (-m)$$

и

$$A + m = A + (-n) = A - n = A - (-m),$$

что и подтверждаетъ обѣ формулы.

§ 26. Замѣчаніе. — Въ алгебраическихъ вопросахъ численныя значенія буквъ никогда не задаются заранѣе; поэтому, при выполненіи алгебраическихъ дѣйствій, можно сомнѣваться, не получатся ли такія выраженія, къ которымъ послѣ подстановки туда численныхъ значеній буквъ не будутъ уже примѣнимы формулы, справедливыя въ другихъ случаяхъ. Вслѣдствіе этого весьма важно, чтобы формулы прилагались ко всѣмъ возможнымъ случаямъ; отсюда становится понятною огромная польза принятыхъ нами соглашеній относительно отрицательныхъ чиселъ.

УПРАЖНЕНІЯ

I.

O A B

Два курьера M и N ѣдутъ по линіи OB. Въ моментъ отъѣзда одинъ изъ нихъ находился въ точкѣ A, а другой въ точкѣ B, на разстояніяхъ a и b отъ точки O; ѣдутъ они въ направленіи OB сь скоростями v и u. Найти формулы для разстоянія x между обоими курьерами по прошествіи времени t и для разстоянія y между точкою O и серединою прямой, соединяющей этихъ курьеровъ по прошествіи того же времени t.

Отв.

$x = b - a + (u - v)t$, или $x = a - b + (v - u)t$, смотря по тому, будетъ ли N впереди или позади M;

$$y = \frac{a+b}{2} + \frac{v+u}{2}t.$$

II. Въ трехъ сосудахъ находится смѣсь воды и вина. въ первомъ—a литровъ воды и b литровъ вина; во второмъ—a' литровъ воды и b' литровъ вина; въ третьемъ—a'' литровъ воды и b'' литровъ вина. Берутъ половину смѣси, содержащейся въ первомъ сосудѣ и вливаютъ во второй; затѣмъ берутъ треть вновь образовавшейся смѣси изъ второго сосуда и вливаютъ въ третій. Найти формулы, показывающія, сколько въ отдѣльности вина и воды содержится въ каждомъ сосудѣ послѣ всѣхъ смѣшеній.

Отв.

	Вода	Вино
Въ 1-омъ сосудѣ	$\frac{a}{2}$,	$\frac{b}{2}$;
во 2-омъ „	$\frac{2a'+a}{3}$,	$\frac{2b'+b}{3}$;
въ 3-емъ „	$\frac{6a''+2a'+a}{6}$,	$\frac{6b''+2b'+b}{6}$.

III. Два сосуда A и A', вмѣстимость которыхъ v и v', наполнены первый водою, а второй—виномъ. Съ помощью двухъ кружекъ одинаковой вмѣстимости черпаютъ изъ каждаго сосуда по одинаковому объему u жидкости и вливаютъ въ A то, что взято изъ A', и обратно. Эту операцію производятъ три раза. Найти формулы, показывающія, сколько стало вина и воды въ каждомъ сосудѣ послѣ всѣхъ этихъ смѣшеній.

Отв.

Въ сосудѣ A:

количество воды $=\left(\frac{(v-u)^2}{v}+\frac{u^2}{v'}\right)\frac{v-u}{v}+\left(\frac{v'-u}{v'}+\frac{v-u}{v}\right)\frac{u^2}{v'}$,

количество вина $=\left(\frac{v-u}{v}+\frac{v'-u}{v'}\right)\frac{u(v-u)}{v}+\left(\frac{(v'-u)^2}{v'}+\frac{u^2}{v}\right)\frac{u}{v'}$;

въ сосудѣ A':

количество воды $=\left(\frac{v'-u}{v'}+\frac{v-u}{v}\right)\frac{u(v'-u)}{v'}+\left(\frac{(v-u)^2}{v}+\frac{u^2}{v'}\right)\frac{u}{v}$,

количество вина $=\left(\frac{(v'-u)^2}{v'}+\frac{u^2}{v}\right)\frac{v'-u}{v'}+\left(\frac{v-u}{v}+\frac{v'-u}{v'}\right)\frac{u^2}{v}$.

ГЛАВА ВТОРАЯ

Алгебраическое умноженіе

§ 27. Въ алгебраическомъ умноженіи различаютъ три случая. 1) умноженіе одночлена на одночленъ, 2) умноженіе многочлена на одночленъ, и *обратно*, 3) умноженіе многочлена на многочленъ.

I. Умноженіе одночленовъ

§ 28. Правило умноженія одночленовъ. — Произведеніе двухъ одночленовъ M и N есть одночленъ MN.

Если оба одночлена — цѣлые, имѣютъ коэффиціенты и общія буквы, то результатъ можетъ быть упрощенъ и получить тогда названіе *выполненнаго произведенія* двухъ одночленовъ. Упрощеніе покоится на двухъ слѣдующихъ принципахъ, доказываемыхъ въ ариѳметикѣ:

1. Произведеніе нѣсколькихъ множителей не зависитъ отъ порядка дѣйствій.

2. Чтобы умножить одно произведеніе нѣсколькихъ множителей на другое такое же произведеніе, достаточно составить произведеніе изъ всѣхъ этихъ множителей.

Пусть, напримѣръ, $M = 5a^4b^3c$, $N = 7a^5c^3d^2$. По второму принципу

$$M = aaaabbbc \times 5, \quad N = aaaaacccdd \times 7,$$

и, слѣдовательно,

$$MN = aaaabbbc \times 5 \times aaaaacccdd \times 7,$$

откуда по первому принципу получаемъ:

$$MN = aaaaaaaaabbbccccdd \times 5 \times 7.$$

Прилагая снова второй принципъ, имѣемъ:

$$MN = a^9b^3c^4d^2 \times 35,$$

или

$$MN = 35a^9b^3c^4d^2.$$

Этотъ методъ—общій и приводитъ къ слѣдующему правилу:

Чтобы получить произведеніе двухъ цѣлыхъ одночленовъ, составляютъ произведеніе ихъ коэффиціентовъ, рядомъ съ нимъ съ правой стороны пишутъ по разу всѣ буквы, встрѣчающіяся въ обоихъ одночленахъ, и надъ каждою изъ нихъ ставятъ показатель, равный суммѣ показателей этой буквы въ томъ и другомъ одночленѣ. Если

какая-нибудь буква входитъ только въ одинъ одночленъ, то ее пишутъ въ произведенiи съ ея показателемъ.

§ 29. Произведенiе нѣсколькихъ одночленовъ. — Только-что полученное правило даетъ возможность составить произведенiе какого-угодно числа одночленовъ. Въ самомъ дѣлѣ, для этой цѣли достаточно умножить первый одночленъ на второй, полученное произведенiе, представляющее также одночленъ, умножить на третiй, затѣмъ новое произведенiе на четвертый, и т. д. Такъ напримѣръ,

$$7a^3b^2e \times 5a^2bc^2 \times 8a^4c^3d^2 \times 2ade = 560a^{10}b^3c^5d^3e^2.$$

Отсюда можно заключить, что m-ая степень одночлена получится, если возвысить въ m-ую степень коэффицiентъ и умножить на m каждый изъ показателей. Такъ, напримѣръ,

$$(5a^3b^2c)^m = 5^m a^{3m} b^{2m} c^m$$

II. Умноженiе многочлена на одночленъ

§ 30. Правило умноженiя. — Пусть требуется умножить многочленъ

$$P = a - b + c - d$$

на одночленъ m (a, b, c, d — какiе-угодно одночлены). Для большей ясности мы различимъ нѣсколько случаевъ.

1. Одночленъ m представляетъ цѣлое число. Въ этомъ случаѣ умноженiе приводится къ сложенiю m многочленовъ, равныхъ P, т.-е.

$$Pm = (a - b + c - d) + (a - b + c - d) + (a - b + c - d) + \ldots,$$

что по правилу сложенiя (§ 21) равносильно равенству:

$$Pm = am - bm + cm - dm.$$

Отсюда мы видимъ, что каждый членъ множимаго умножается на множитель, сохраняя при этомъ свой знакъ.

2. Одночленъ m представляетъ дробь вида $\frac{1}{p}$, гдѣ p — цѣлое

число. Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, умножить на $\frac{1}{p}$ все равно, что взять p-ую часть отъ множимаго; результатъ будетъ:

$$Pm = \frac{a}{p} - \frac{b}{p} + \frac{c}{p} - \frac{d}{p},$$

потому что, умноживъ это выраженіе на p, мы по предыдущему (когда множитель представляетъ цѣлое число) получимъ снова множимое: $(a - b + c - d)$. Эта же послѣдняя формула можетъ быть представлена въ видѣ:

$$Pm = a \cdot \frac{1}{p} - b \cdot \frac{1}{p} + c \cdot \frac{1}{p} - d \cdot \frac{1}{p},$$

или

$$Pm = am - bm + cm - dm,$$

какъ и въ первомъ случаѣ.

3. Одночленъ m представляетъ дробь вида $\frac{p}{q}$. Умножить на $\frac{p}{q}$ значитъ повторить p разъ q-ую часть множимаго. По второму случаю множимое, раздѣленное на q, будетъ:

$$a \cdot \frac{1}{q} - b \cdot \frac{1}{q} + c \cdot \frac{1}{q} - d \cdot \frac{1}{q};$$

умножая полученное выраженіе на p, находимъ:

$$a \cdot \frac{p}{q} - b \cdot \frac{p}{q} + c \cdot \frac{p}{q} - d \cdot \frac{p}{q},$$

потому что умножить q-ую часть какого-нибудь числа (въ данномъ случаѣ каждаго члена нашего многочлена) на p все равно, что умножить это число на $\frac{p}{q}$. Переписывая послѣднюю формулу въ видѣ:

$$Pm = am - bm + cm - dm,$$

замѣчаемъ, что правило умноженія остается то же самое, что и въ первыхъ двухъ случаяхъ, а именно: *чтобы умножить много-*

членъ на одночленъ, умножаютъ отдѣльно каждый членъ многочлена на одночленъ, не измѣняя ихъ знаковъ.

Такъ какъ наши множители представляютъ собою числа, то произведеніе не измѣнится, если ихъ переставить (§ 28), а въ такомъ случаѣ только-что выведенное правило умноженія многочлена на одночленъ будетъ относиться и къ умноженію одночлена на многочленъ. Напримѣръ, оба произведенія

$$(3a^4b - 5a^3b^2 + 6abc^3 - 4b^2c) \,.\, 5ab^2,$$
$$5ab^2 \,.\, (3a^4b - 5a^3b^2 + 6abc^3 - 4b^2c)$$

дадутъ одинъ и тотъ же многочленъ:

$$15a^5b^3 - 25a^4b^4 + 30a^2b^3c^3 - 20ab^4c.$$

§ 31. Вынесеніе общаго множителя за скобки. — Полученная въ предыдущемъ параграфѣ формула:

$$(a - b + c - d)m = am - bm + cm - dm$$

показываетъ, что если всѣ члены многочлена $(am - bm + cm - dm)$ содержатъ общаго множителя m, то его можно опустить въ каждомъ изъ нихъ, что дастъ многочленъ $(a - b + c - d)$, и этотъ послѣдній умножить на m, т.-е. написать $(a - b + c - d)m$. Это называется *вынесеніемъ общаго множителя за скобки*. Такъ, напримѣръ, члены многочлена: $12a^3x^4 - 8a^5x^2 + 16a^2x^5$ содержатъ общаго множителя $4a^2x^2$ и потому мы можемъ написать:

$$12a^3x^4 - 8a^5x^2 + 16a^2x^5 = (3ax^2 - 2a^3 + 4x^3) \,.\, 4a^2x^2.$$

III. Умноженіе многочлена на многочленъ

§ 32. Случай, когда оба многочлена содержатъ члены, отдѣленные другъ отъ друга только знакомъ $+$. Пусть требуется умножить многочленъ $P = a + b + c$ на многочленъ $Q = p + q + r$; a, b, c, p, q, r обозначаютъ какія-угодно числа, которыя, въ свою очередь, могутъ быть представлены алгебраическими выраженіями, болѣе или менѣе сложными. По правилу § 30-го мы можемъ написать:

$$PQ = P(p + q + r) = Pp + Pq + Pr,$$

или

$$PQ = (a + b + c)p + (a + b + c)q + (a + b + c)r.$$

Прилагая опять къ каждому изъ этихъ произведенiй правило **§ 30**-го, получимъ:

$$PQ = ap + bp + cp + aq + bq + cq + ar + br + cr.$$

Отсюда выводимъ такое правило:

Произведенiе двухъ многочленовъ, члены которыхъ — положительные, есть также многочленъ, равный суммѣ произведенiй, получаемыхъ отъ умноженiя каждаго члена перваго многочлена на каждый членъ втораго.

§ 33. Случай, когда оба многочлена содержатъ члены со знакомъ − впереди. — По 2-му принципу **§ 15**-го мы можемъ составить во множимомъ одну группу изъ членовъ со знакомъ + впереди и другую изъ членовъ со знакомъ − впереди. Назовемъ эти группы черезъ A и B. Черезъ C и D назовемъ подобныя же группы во множителѣ. Тогда наши многочлены будутъ:

$$P = A - B, \quad Q = C - D.$$

Прилагая къ нимъ правило **§ 30**-го, пишемъ:

$$PQ = P(C - D) = PC - PD = (A - B)C - (A - B)D.$$

Прилагая опять то же правило къ каждому изъ полученныхъ частныхъ произведенiй, имѣемъ:

$$PQ = (AC - BC) - (AD - BD),$$

что по правилу вычитанiя многочленовъ (**§ 22**) даетъ:

$$PQ = AC - BC - AD + BD.$$

А такъ какъ AC, BC, AD и BD суть произведенiя многочленовъ, состоящихъ изъ положительныхъ членовъ, то эти произведенiя можно выполнить по правилу **§ 32**-го и затѣмъ произвести всѣ сложенiя и вычитанiя, указанныя въ послѣдней формулѣ. Такимъ образомъ мы получимъ одинъ многочленъ, который и будетъ требуемымъ произведенiемъ. Произведенiе двухъ многочленовъ всегда можетъ быть замѣнено однимъ многочленомъ, называемымъ часто *ихъ выполненнымъ произведенiемъ.*

§ 34. Правило умноженiя двухъ многочленовъ. — По формуламъ двухъ предыдущихъ параграфовъ мы прежде всего замѣчаемъ, что произведенiе PQ содержитъ въ себѣ произведенiя каждаго изъ членовъ множимаго на каждый изъ членовъ множителя. Что же

касается знаковъ при каждомъ изъ членовъ произведенія, то легко видѣть, что произведеніе AC, гдѣ всѣ члены каждаго изъ множителей со знакомъ $+$, даютъ члены со знакомъ $+$ въ общемъ произведеніи PQ; также даетъ члены со знакомъ $+$ въ общемъ произведеніи произведеніе BD, гдѣ всѣ члены каждаго изъ множителей со знакомъ ; наоборотъ, произведенія BC и AD, гдѣ члены одного множителя со знакомъ $+$, а другого со знакомъ $-$, въ общемъ произведеніи даютъ члены со знакомъ . Отсюда выводимъ слѣдующее правило:

Чтобы умножить одинъ многочленъ на другой, умножаютъ каждый изъ членовъ множимаго на каждый изъ членовъ множителя и приписываютъ знакъ $+$ тѣмъ членамъ произведенія, которые получены отъ умноженія членовъ, входящихъ въ оба многочлена съ одинаковыми знаками, и знакъ $-$ тѣмъ членамъ произведенія, которые получены отъ умноженія членовъ, входящихъ въ данные многочлены съ различными знаками. Если получатся подобные члены, то дѣлаютъ приведеніе

Правило знаковъ можетъ быть представлено слѣдующею таблицею.

$$+a\,.+b=+ab.$$
$$a\,.+b=-ab,$$
$$+a\,.-b=-ab,$$
$$a\,.-b\quad +ab.$$

§ 35. Упрощенный способъ изложенія полученныхъ выводовъ.— Предыдущее правило можно изложить короче, если разсматривать, подобно тому, какъ это мы сдѣлали въ **§ 20**-омъ, члены со знакомъ $-$ какъ *отрицательныя* числа, *приложенныя* къ предшествующимъ членамъ, и ввести кромѣ того слѣдующія *опредѣленія:*

Произведеніе отрицательнаго числа $(-a)$ *на положительное число* b *равно* $-(a\,.\,b)$, т.-е.

$$(-a)(b)=-(a\,.\,b). \tag{1}$$

Произведеніе двухъ отрицательныхъ чиселъ $(-a)$ *и* $(-b)$ *равно* $a\,.\,b$, т.-е.

$$(-a)(-b)=ab. \tag{2}$$

Послѣ такихъ *соглашеній* **правило умноженія можетъ быть изложено такъ:** ***произведеніе двухъ многочленовъ равно суммѣ произведеній каждаго изъ членовъ множимаго на каждый изъ членовъ множителя.***

Въ самомъ дѣлѣ, пусть, напримѣръ, дано умножить $(a-b)$ на $(c-d)$. По правилу **§ 34**-го получимъ:

$$ac-bc-ad+bd,$$

а это, принявъ во вниманіе наши соглашенія, можемъ написать въ видѣ:

$$ac+(-b)c+(-d)a+(-b)(-d),$$

что какъ разъ и есть сумма произведеній каждаго изъ членовъ, a и $-b$, множимаго на каждый изъ членовъ, c и $-d$, множителя.

§ 36. Замѣчаніе I. — Нельзя искать доказательства для формулъ:

(1) $$(-a)(b)=-ab, \quad (-a)(-b)=ab, \tag{2}$$

такъ какъ онѣ только опредѣленія. *Благодаря этимъ опредѣленіямъ можно ограничиться однимъ правиломъ, общимъ для всѣхъ случаевъ, какіе могутъ встрѣтиться при перемноженіи многочленовъ.*

§ 37. Замѣчаніе II. — Мы видѣли (**§ 33**), что

$$PQ \text{ или } (A-B)(C-D)=AC-BC-AD+BD, \tag{3}$$

при чемъ A и C должны были быть соотвѣтственно больше, чѣмъ B и D; послѣ нашихъ соглашеній эта формула становится справедливою во всѣхъ случаяхъ.

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что одинъ изъ множителей, напримѣръ, первый — отрицателенъ, т.-е.

$$A<B, \quad C>D.$$

Въ такомъ случаѣ по **§ 24**-му $A-B=-(B-A)$, и мы можемъ, принимая во вниманіе первое соглашеніе (**§ 35**), написать:

$$PQ \text{ или } (A-B)(C-D)=-(B-A)(C-D).$$

Выполняя же произведеніе по правилу **§ 34**-го, получаемъ:

$$PQ=-(BC-AC-BD+AD),$$

или, по соглашенію **§ 24**-го,

$$PQ=-BC+AC+BD-AD,$$

что совпадаетъ съ формулою (3), если не обращать вниманія на порядокъ членовъ.

Предположимъ, во-вторыхъ, что обѣ разности, $(A-B)$ и $(C-D)$, отрицательны; припоминая 2-ое соглашеніе **§ 35**-го, говоримъ, что произведеніе ихъ будетъ такое же, какъ если бы онѣ обѣ были положительными, т.-е.

$$PQ \text{ или } (A-B)(C-D)=(B-A)(D-C)=BD-AD-BC+AC,$$

что также совпадаетъ съ формулою (3), если не обращать вниманія на порядокъ членовъ.

§ 38. Замѣчаніе III. — Впредь мы будемъ представлять всякій многочленъ, каковы бы ни были знаки его членовъ, подъ видомъ:

$$a+b+c+p+q+r,$$

гдѣ a, b, c, p, q, r обозначаютъ положительныя или отрицательныя числа.

Напримѣръ, формула

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \tag{1}$$

получаемая непосредственно по правилу умноженія, будетъ поэтому справедлива, каковы бы ни были знаки количествъ, представленныхъ буквами a и b. Предположимъ, что b есть отрицательное число $(-b')$; тогда предыдущая формула преобразуется такъ:

$$(a-b')^2=a^2+2a(-b')+(-b')^2,$$

или, принимая во вниманіе соглашенія **§ 35**-го,

$$(a-b')^2=a^2-2ab'+b'^2. \tag{2}$$

Мы видимъ, что формулы, выражающія квадратъ суммы и квадратъ разности, приводятся такимъ образомъ къ одной.

Точно также изъ формулы:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \tag{3}$$

получаемой изъ равенства (1), если обѣ его части умножить на $(a+b)$, можно вывести формулу:

$$(a-b')^3=a^3-3a^2b'+3ab'^2-b'^3, \tag{4}$$

предположивъ, что b представляетъ отрицательное число $(-b')$. Мы видимъ, что формулы, выражающія кубъ суммы и кубъ разности, также приводятся къ одной.

§ 39. Замѣчаніе IV. — Формулы:

(1) $$(-a)b = -ab, \quad (-a)(-b) = ab$$ (2)

выражаютъ наши соглашенія при томъ предположеніи, что a и b положительныя числа, но легко видѣть, что по тѣмъ же соглашеніямъ эти формулы будутъ справедливы и тогда, когда a и b числа отрицательныя.

Въ самомъ дѣлѣ, первая формула можетъ быть прочитана такъ. *Если въ какомъ-нибудь произведеніи перемѣнить знакъ у одного изъ множителей, то произведеніе также перемѣнитъ знакъ, не измѣняя своей величины*; вторая же — слѣдующимъ образомъ: *Если въ какомъ-нибудь произведеніи перемѣнить знаки у обоихъ множителей, то произведеніе не измѣнится ни по величинѣ, ни по знаку.*

Оба эти предложенія очевидны въ силу нашихъ соглашеній: разсматривая произведеніе ab двухъ какихъ-угодно множителей, мы говоримъ, что произведеніе будетъ положительное (**§ 35**), если оба множителя одного и того же знака; если же измѣнить знакъ у одного изъ нихъ, то они явятся тогда съ различными знаками, и произведеніе ихъ станетъ отрицательнымъ. И обратно въ томъ случаѣ, если сначала оба множителя будутъ съ различными знаками.

§ 40. Замѣчаніе V. — *Произведеніе нѣсколькихъ множителей*, изъ которыхъ нѣкоторые — отрицательные, опредѣляется такъ же, какъ въ ариѳметикѣ: это есть результатъ, который получится, если умножить первый множитель на второй, полученное произведеніе — на третій, новое произведеніе — на четвертый, и т. д. до конца.

Отсюда вытекаетъ, что *произведеніе будетъ имѣть ту же абсолютную величину, какъ если бы всѣ множители были принимаемы за положительные, а знакъ будетъ* +, *если число отрицательныхъ множителей будетъ четное, и* —, *если число отрицательныхъ множителей будетъ нечетное.*

Для доказательства этого замѣчаемъ, что можно всегда ввести въ качествѣ перваго множителя + 1. При послѣдовательныхъ умноженіяхъ для полученія нашего произведенія первоначальный знакъ, который теперь будетъ у насъ +, измѣнится столько разъ, сколько отрицательныхъ множителей; и такъ какъ два послѣдовательныя измѣненія будутъ давать +, то, очевидно, знакъ + будетъ тогда, когда число измѣненій будетъ четное, и знакъ —, когда число ихъ будетъ нечетное.

Изъ предыдущаго ясно, что четныя степени отрицательнаго числа суть числа положительныя, а нечетныя — отрицательныя.

§ 41. Опредѣленіе дѣленія въ томъ случаѣ, когда дѣлимое и дѣлитель не будутъ заразъ неположительными. — Если опредѣлять *частное* двухъ чиселъ A и B, какъ такое число, которое, будучи умножено на дѣлителя B, даетъ дѣлимое A, то въ силу нашихъ соглашеній *абсолютная величина частнаго не будетъ зависѣть отъ знаковъ дѣлимаго и дѣлителя, а само частное будетъ положительнымъ, если дѣлимое и дѣлитель одного знака, и отрицательнымъ въ противномъ случаѣ.*

Въ самомъ дѣлѣ, если дѣлимое — положительно, частное должно имѣть такой же знакъ, какъ и дѣлитель; а если дѣлимое — отрицательно, частное и дѣлитель должны имѣть знаки разные (§ 34). Это *правило знаковъ* можетъ быть представлено слѣдующею таблицею:

$$+a:+b \quad +\frac{a}{b},$$

$$+a: \quad b = \quad \frac{a}{b},$$

$$-a:+b=-\frac{a}{b},$$

$$-a:-b \quad +\frac{a}{b}.$$

§ 42. Умноженіе какого-угодно числа многочленовъ. — *Чтобы перемножить нѣсколько многочленовъ, слѣдуетъ сначала умножить первый изъ нихъ на второй, полученный результатъ — на третій, и т. д.* Такъ какъ произведеніе двухъ многочленовъ даетъ всегда многочленъ, то для составленія произведенія какого-угодно числа многочленовъ достаточно знать, какъ перемножить два многочлена (§ 34).

Пусть будетъ дано перемножить нѣсколько многочленовъ: P_1, P_2, P_3, P_4. Умножая P_1 на P_2, получимъ произведеніе Q_1, всѣ члены котораго суть произведенія всѣхъ членовъ P_1 на всѣ члены P_2 (§ 35). Умножая далѣе Q_1 на P_3, получимъ произведеніе Q_2, которое будетъ суммою произведеній всѣхъ членовъ Q_1 на всѣ члены P_3, т.-е. суммою всевозможныхъ произведеній, изъ которыхъ каждое составлено изъ трехъ множителей: одинъ взятъ изъ

членовъ P_1, другой — изъ членовъ P_2 и третій — изъ членовъ P_3. Далѣе, умножаемъ Q_2 на P_4; получаемъ произведеніе Q_3, которое будетъ суммою произведеній всѣхъ членовъ Q_2 на всѣ члены P_4, т.-е. суммою всевозможныхъ произведеній, изъ которыхъ каждое составлено изъ четырехъ множителей, взятыхъ соотвѣтственно изъ членовъ нашихъ многочленовъ: P_1, P_2, P_3, P_4. Это разсужденіе можно продолжать безконечно, и мы увидимъ, что *произведеніе многочленовъ* $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ *есть сумма всевозможныхъ произведеній по n множителей въ каждомъ, при чемъ одинъ изъ нихъ взятъ изъ членовъ* P_1, *другой — изъ членовъ* P_2, *третій — изъ членовъ* $P_3, \ldots$, *n-ый — изъ членовъ* P_n.

IV. Произведеніе многочленовъ, расположенныхъ по степенямъ какой-нибудь буквы

§ 43. Что значитъ расположить многочленъ по степенямъ какой-нибудь буквы. — *Расположить многочленъ по степенямъ какой-нибудь буквы*, называемой въ этомъ случаѣ *главною*, значитъ расположить его члены въ такомъ порядкѣ, чтобы показатели этой буквы, начиная съ перваго члена и до конца, шли бы, или все уменьшаясь, или все увеличиваясь. Такъ, напримѣръ, многочленъ.

$$8x^5 + 3x^4 + 2x^3 - x^2 - 11x + 1$$

расположенъ по *убывающимъ степенямъ* буквы x, а многочленъ:

$$5a^4 - 3a^3b - 6ab^3 + 4b^4$$

— *по возрастающимъ степенямъ* буквы b и въ то же время по убывающимъ степенямъ буквы a.

Многочленъ считается *полнымъ*, если содержитъ *главную* букву во всѣхъ степеняхъ, начиная съ высшей. Первый изъ двухъ предыдущихъ многочленовъ—полный, второй—*неполный*, такъ какъ въ немъ недостаетъ члена a^2b^2. Полный многочленъ заключаетъ въ себѣ членовъ на 1 больше самаго высшаго показателя главной буквы: это происходитъ отъ того, что въ такомъ многочленѣ долженъ быть членъ, не содержащій вовсе главной буквы, или, что все равно, содержащій ее въ *нулевой степени*.

Если нѣсколько членовъ многочлена содержатъ главную

букву въ одной и той же степени, то всѣ эти члены соединяютъ въ одинъ, *вынося за скобку* степень этой буквы (**§ 31**); полученный, какъ множитель, многочленъ принимается за коэффиціентъ при этой степени. Этотъ коэффиціентъ заключаютъ въ скобки, или же располагаютъ въ вертикальномъ столбцѣ съ лѣвой стороны степени

Примѣръ. —Многочленъ

$$a^2x^5 - 2abx^5 + b^2x^5 + 2a^3x^4 - 4b^3x^4 - a^4x^3 - a^2b^2x^3 + b^4x^3 + 3a^2b^3x^2 - 2ab^4x$$

по предыдущему напишется въ такомъ видѣ

$$(a^2 - 2ab + b^2)x^5 + (2a^3 - 4b^3)x^4 - (a^4 - a^2b^2 + b^4)x^3 + (3a^2b^3 - 2ab^4)x^2,$$

или же въ видѣ

$$\begin{array}{rl rl rl rl}
a^2 & \Big| x^5 & +2a^3 & \Big| x^4 & -a^4 & \Big| x^3 & +3a^2b^3 & \Big| x^2 \\
-2ab & & -4b^3 & & -a^2b^2 & & -2ab^4 & \\
+b^2 & & & & +b^4 & & &
\end{array}$$

Вертикальная черта такимъ образомъ отдѣляетъ каждую степень главной буквы отъ ея коэффиціента.

§ 44. Примѣры умноженій, когда многочлены расположены по степенямъ какой-нибудь буквы.—На практикѣ располагаютъ оба множителя по степенямъ одной и той же общей буквы, если таковая у нихъ есть, и множитель пишутъ, какъ въ ариѳметикѣ, подъ множимымъ. Частныя произведенія множимаго на каждый членъ множителя явятся въ такомъ случаѣ расположенными по степенямъ той же самой главной буквы; поэтому подобные члены легко будетъ размѣстить одинъ подъ другимъ и затѣмъ сдѣлать приведеніе.

Примѣръ 1. — Даны два полныхъ многочлена:

$$\begin{array}{lll}
\text{Множимое} & \ldots & 3x^4 - 5ax^3 - 4a^2x^2 + 7a^3x - 2a^4 \\
\text{Множитель} & \ldots & \underline{2x^3 - 5ax^2 - 3a^2x + 4a^3}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Произведенія} \\ \text{множимаго на} \end{array}
\left\{ \begin{array}{ll}
2x^3 \ldots & 6x^7 - 10ax^6 - 8a^2x^5 + 14a^3x^4 - 4a^4x^3 \\
-5ax^2 \ldots & \qquad -15ax^6 + 25a^2x^5 + 20a^3x^4 - 35a^4x^3 + 10a^5x^2 \\
-3a^2x \ldots & \qquad\qquad -9a^2x^5 + 15a^3x^4 + 12a^4x^3 - 21a^5x^2 + 6a^6x \\
+4a^3 \ldots & \qquad\qquad\qquad +12a^3x^4 - 20a^4x^3 - 16a^5x^2 + 28a^6x - 8a^7
\end{array} \right.$$

Упрощенное произведеніе: $6x^7 - 25ax^6 + 8a^2x^5 + 61a^3x^4 - 47a^4x^3 - 27a^5x^2 + 34a^6x - 8a^7$.

Примѣръ II. — Даны многочлены неполные. Въ такомъ случаѣ оставляютъ въ произведенiи пустые промежутки, чтобы можно было размѣстить подобные члены одинъ подъ другимъ.

Множимое . . . . . . $5a^5-3a^4b-2a^2b^3+b^5$

Множитель . . . . . $3a^3-5ab^2+2b^3$

Произведенie множимаго на									
$3a^3$	$15a^8$	$-9a^7b$		$-6a^5b^3$		$+3a^3b^5$			
$-5ab^2$			$-25a^6b^2$	$+15a^5b^3$		$+10a^3b^5$		$-5ab^7$	
$+2b^3$				$+10a^5b^3$	$-6a^4b^4$		$-4a^2b^6$		$+2b^8$

Упрощенное произведенie: $15a^8-9a^7b-25a^6b^2+19a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8$.

Примѣръ III. — Даны такiе многочлены, у которыхъ коэффицiенты суть также многочлены:

Множимое	a^2 $-2ab$ $+b^2$ x^3	$+2a^3$ $-4b^3$ x^2	$+a^4$ $-a^2b^2$ $+b^4$ x	$+3a^2b^5$ $-2ab^6$
Множитель	a $-b$ x^2	$+a^2$ $-ab$ $-b^2$ x	$+a^3$ $+b^3$	

Частныя произведенiя на

ax^2	a^3 $-2a^2b$ $+ab^2$ x^5	$+2a^4$ $-4ab^3$ x^4	$+a^5$ $-a^3b^2$ $+ab^4$ x^3	$+3a^3b^5$ $-2a^2b^6$ x^2	x	
$-bx^2$	$-a^2b$ $+2ab^2$ $-b^3$	$-2a^3b$ $+4b^4$	$-a^4b$ $+a^2b^3$ $-b^5$	$-3a^2b^6$ $+2ab^7$		
$+a^2x$		$+a^4$ $-2a^3b$ $+a^2b^2$	$+2a^5$ $-4a^2b^3$	$+a^6$ $-a^4b^2$ $+a^2b^4$	$+3a^4b^5$ $-2a^3b^6$	
$-abx$		$-a^3b$ $+2a^2b^2$ $-ab^3$	$-2a^4b$ $+4ab^4$	$-a^5b$ $+a^3b^3$ $-ab^5$	$-3a^3b^6$ $+2a^2b^7$	
$-b^2x$		$-a^2b^2$ $+2ab^3$ $-b^4$	$-2a^3b^2$ $+4b^5$	$-a^4b^2$ $+a^2b^4$ $-b^6$	$-3a^2b^7$ $+2ab^8$	
a^3			a^5 $-2a^4b$ $+a^3b^2$	$+2a^6$ $-4a^3b^3$	$+a^7$ $-a^5b^2$ $+a^3b^4$	$+3a^5b^5$ $-2a^4b^6$
$+b^3$			$+a^2b^3$ $-2ab^4$ $+b^5$	$+2a^3b^3$ $-4b^6$	$+a^4b^3$ $-a^2b^5$ $+b^7$	$+3a^2b^8$ $-2ab^9$

Упрощенное произведенie					
a^3 $-3a^2b$ $+3ab^2$ $-b^3$ x^5	$+3a^4$ $-5a^3b$ $+2a^2b^2$ $-3ab^3$ $+3b^4$ x^4	$+a^4b$ $-4a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+3ab^4$ $+4b^5$ x^3	$-3a^6$ $+a^5b$ $+10a^3b^3$ $-3a^2b^4$ $+ab^5$ $-5b^6$ x^2	$+a^7$ $+a^4b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$ x	$-3a^5b^5$ $+2a^4b^5$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$

Мы видимъ, что въ этомъ случаѣ выкладки сложнѣе, но правило всегда одно и то же: умножаютъ всѣ члены множимаго на всѣ члены множителя и дѣлаютъ приведенiе подобныхъ членовъ.

V. Теоремы и приложенія

§ 45. Наименьшее число членовъ произведенія. — При умноженіи многочлена на многочленъ мы видѣли, что произведеніе можетъ заключать подобные члены, приводящіеся къ одному. Но *есть въ каждомъ произведеніи, по крайней мѣрѣ, два члена, которые не имѣютъ себѣ подобныхъ.* Такими членами будутъ произведенія перваго члена множимаго на первый членъ множителя и послѣдняго члена множимаго на послѣдній членъ множителя, если и множимое и множитель расположены по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы.

Въ самомъ дѣлѣ, всякій членъ произведенія есть произведеніе одного изъ членовъ множимаго на какой-нибудь членъ множителя и показатель главной буквы всякаго члена произведенія есть сумма показателей главной буквы въ тѣхъ множителяхъ, изъ которыхъ составляется этотъ членъ произведенія. Слѣдовательно, въ произведеніи перваго члена множимаго на первый членъ множителя показатель главной буквы есть сумма наивысшихъ показателей ея, встрѣчающихся во множимомъ и во множителѣ: всякій другой членъ произведенія будетъ имѣть главную букву въ болѣе низшей степени. Также въ произведеніи послѣднихъ множителей показатель главной буквы будетъ сумма наинизшихъ ея степеней, встрѣчающихся во множимомъ и во множителѣ; всѣ другіе члены произведенія будутъ содержать главную букву въ болѣе высшей степени. Поэтому эти два члена произведенія подобныхъ себѣ имѣть не могутъ.

Произведеніе двухъ многочленовъ или многочлена на одночленъ будетъ состоять, по крайней мѣрѣ, изъ двухъ членовъ. Можетъ случиться, что другихъ членовъ, кромѣ этихъ двухъ, въ произведеніи не будетъ.

Примѣръ.—Множимое . . . $x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Множитель . . . $x - 1$

$$x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x$$
$$\quad - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$$

Упрощенное произведеніе . . . $x^8 \qquad - 1$

На этомъ примѣрѣ мы видимъ, что въ произведеніи уничтожились всѣ члены кромѣ перваго и послѣдняго, полученныхъ отъ перемноженія между собою соотвѣтственно первыхъ и послѣднихъ членовъ множимаго и множителя.

§ 46. Замѣчаніе. — Если оба многочлена содержатъ по нѣсколько буквъ, то ихъ можно расположить послѣдовательно по степенямъ каждой изъ нихъ; и прилагая каждый разъ предыдущую теорему, можно будетъ получить нѣсколько членовъ произведенія, не имѣющихъ себѣ подобныхъ. Пусть, напр., требуется перемножить два многочлена, расположенныхъ по степенямъ a:

$$a^4 - a^3b^5 + a^2b^3 - b^4, \quad a^6 + a^4b - a^3b^7 - ab^2$$

Члены произведенія $a^4 . a^6$ или, что все равно, a^{10} и $(-b^4)(-ab^2)$ или, что все равно, ab^6 не будутъ имѣть себѣ подобныхъ. Расположивъ теперь наши многочлены по степенямъ b, т.-е. представивъ ихъ въ видѣ:

$$-a^3b^5 - b^4 + a^2b^3 + a^4, \qquad -a^3b^7 - ab^2 + a^4b + a^6,$$

замѣчаемъ, что члены произведенія $(-a^3b^5)(-a^3b^7)$ и $a^4 . a^6$ или, что все равно, a^6b^{12} и a^{10} не будутъ имѣть себѣ подобныхъ. Членъ a^{10} былъ уже полученъ ранѣе и мы находимъ только три различныхъ члена произведенія, которые не будутъ имѣть себѣ подобныхъ и, слѣдовательно, останутся безъ приведенія.

§ 47. Наибольшее число членовъ произведенія. — Произведеніе множимаго на одинъ изъ членовъ множителя содержитъ столько членовъ, сколько ихъ во множимомъ. Поэтому, если въ произведеніи нѣтъ подобныхъ членовъ, то *число членовъ всего произведенія будетъ равно произведенію числа членовъ множимаго на число членовъ множителя.* Очевидно, что это будетъ *наибольшимъ* числомъ членовъ произведенія.

§ 48. Однородныя произведенія. — На основаніи предыдущаго можно высказать такую теорему:

Произведеніе нѣсколькихъ однородныхъ многочленовъ (**§ 8**) *есть также однородный многочленъ, степень однородности котораго есть сумма степеней однородности отдѣльныхъ множителей.*

§ 49. Теорема. — *Произведеніе суммы двухъ чиселъ a и b на ихъ разность равно разности квадратовъ этихъ чиселъ.* Эта теорема

вытекаетъ непосредственно изъ приложенія правила умноженія къ произведенію $(a+b)$ на $(a-b)$; получается такая формула:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

Эта формула въ особенности важна тѣмъ, что служитъ для *разложенія разности двухъ квадратовъ на два множителя, изъ которыхъ одинъ есть сумма, а другой — разность ихъ корней.*

Примѣры:

1) $(a^2+ab+b^2)^2-(a^2-ab+b^2)^2=(2a^2+2b^2)\,2ab=4ab\,(a^2+b^2)$;

2) $$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=\frac{2m}{2}\cdot\frac{2n}{2}=mn.$$

§ 50. Теорема. — *Квадратъ многочлена равенъ суммѣ квадратовъ всѣхъ его членовъ, плюсъ удвоенная сумма ихъ произведеній между собою попарно.*

Эта теорема уже извѣстна для двучлена:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Ее легко доказать и для трехчлена $(a+b+c)$, если обозначить черезъ s сумму двухъ первыхъ членовъ $a+b$; дѣйствительно, прилагая предыдущую формулу, находимъ:

$$(a+b+c)^2=(s+c)^2=s^2+2sc+c^2.$$

Замѣнивъ теперь s его значеніемъ и выполнивъ дѣйствія, получимъ:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2&=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.\end{aligned}$$

Теорему эту легко распространить и на многочленъ изъ n членовъ:

$$P=a+b+c+\ldots+k+l.$$

Для этой цѣли обозначимъ черезъ s сумму $(n-1)$ первыхъ членовъ и тогда мы можемъ написать:

$$P^2=(a+b+c+\ldots+k+l)^2=(s+l)^2=s^2+2sl+l^2.$$

Предполагая, что теорема справедлива для многочлена s, состоя-

щаго изъ $(n-1)$ членовъ, т.-е. что s^2 состоитъ изъ суммы квадратовъ членовъ: $a, b, c, \ldots, k$ и ихъ удвоенныхъ произведенiй между собою попарно, мы видимъ, что она справедлива и для многочлена, состоящаго изъ n членовъ. Въ самомъ дѣлѣ, остальные два члена: $2sl$ и l^2 даютъ недостающiя удвоенныя произведенiя всѣхъ первыхъ $(n-1)$ членовъ на l и недостающiй квадратъ послѣдняго члена. — А такъ какъ теорема справедлива два трехчлена, то она будетъ по доказанному справедлива и для четырехчлена; будучи справедливою для четырехчлена, она въ силу тѣхъ же разсужденiй будетъ справедлива и для пятичлена, и т. д. Такимъ образомъ теорема справедлива вообще.

Теорему эту можно представить слѣдующею формулою:

$$(\Sigma a)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab,$$

гдѣ знакъ Σ обозначаетъ сумму членовъ, аналогичныхъ тому, при которомъ этотъ знакъ поставленъ.

Способъ, при помощи котораго мы только-что отъ частной формулы, т.-е. справедливой для отдѣльнаго случая, перешли къ общей, употребляется весьма часто въ алгебрѣ и поэтому долженъ быть отмѣченъ.

Когда хотятъ получить на практикѣ квадратъ многочлена, то примѣняютъ не формулу, выше доказанную, а самый ходъ доказательства, послужившiй для вывода этой формулы, т.-е. составляютъ квадратъ перваго члена, удвоенное произведенiе перваго на второй и квадратъ второго; затѣмъ удвоенное произведенiе суммы первыхъ двухъ на третiй и квадратъ третьяго; послѣ этого удвоенное произведенiе суммы первыхъ трехъ на четвертый и квадратъ четвертаго; и т. д. Кромѣ того, чтобы облегчить приведенiе подобныхъ членовъ, самое вычисленiе располагаютъ такъ, чтобы каждая горизонтальная строка оканчивалась квадратомъ одного изъ членовъ.

Примѣръ. — Пусть требуется возвести въ квадратъ многочленъ.

$$3x^4 - 4ax^3 - 5a^2x^2 + 2a^3x - a^4$$

Будемъ имѣть:

$$\begin{array}{l}
9x^8 \\
\quad - 24ax^7 + 16a^2x^6 \\
\qquad\qquad - 30a^2x^6 + 40a^3x^5 + 25a^4x^4 \\
\qquad\qquad\qquad + 12a^3x^5 - 16a^4x^4 - 20a^5x^3 + 4a^6x^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad - 6a^4x^4 + 8a^5x^3 + 10a^6x^2 - 4a^7x + a^8 \\
\hline
9x^8 - 24ax^7 - 14a^2x^6 + 52a^3x^5 + 3a^4x^4 - 12a^5x^3 + 14a^6x^2 - 4a^7x + a^8.
\end{array}$$

Упрощенный квадратъ.

§ 51. Замѣчаніе. — *Квадратъ многочлена содержитъ, по крайней мѣрѣ, четыре члена, не имѣющихъ себѣ подобныхъ.* Эти члены будутъ два первыхъ и два послѣднихъ, если многочленъ расположенъ по степенямъ какой-нибудь буквы. Въ самомъ дѣлѣ, пусть α и β будутъ показателями главной буквы въ первыхъ двухъ членахъ многочлена; въ такомъ случаѣ въ первыхъ двухъ членахъ квадрата многочлена показатели главной буквы будутъ 2α и $\alpha+\beta$; они будутъ между собою различны, потому что, по предположенію, $\alpha > \beta$, и очевидно, будутъ выше всѣхъ другихъ показателей той же буквы въ остальныхъ членахъ квадрата. Итакъ, эти два члена подобныхъ себѣ не имѣютъ, и, слѣдовательно, останутся безъ приведенія. Такія же разсужденія приложимы къ удвоенному произведенію двухъ послѣднихъ членовъ многочлена и къ квадрату послѣдняго члена.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Доказать, что кубъ многочлена равенъ суммѣ кубовъ всѣхъ его членовъ, плюсъ утроенная сумма произведеній каждаго изъ членовъ на квадратъ каждаго изъ остальныхъ, плюсъ ушестеренная сумма произведеній всѣхъ членовъ между собою по три, т. е. что

$$(\Sigma a)^3 = \Sigma a^3 + 3\Sigma a^2 b + 6\Sigma abc$$

Доказательство такое же, какъ и въ § 50-омъ.

II. Вывести формулу:

$$(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

III. Вывести формулу:

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2) = (ap+bq+cr+ds)^2 + (aq - bp + cs - dr)^2 + (ar - bs - cp + dq)^2 + (as + br - cq - dp)^2$$

IV. Если

$$ab(a^2+b^2) = cd(c^2+d^2),$$

то, вводя обозначенія

$$a+b+c+d = A, \qquad a+b-c-d = B,$$
$$a-b+c-d = C, \qquad a-b-c+d = D,$$

получимъ:

$$AB(A^2+B^2) = CD(C^2+D^2).$$

Упражненія II, III и IV никакой иной трудности, кромѣ длинноты вычисленій, не представляютъ.

V. Пусть x, y, z, u, v, w будутъ какія-угодно числа. Если положить

$$m=\frac{x-y}{x+y},\ p=\frac{y-z}{y+z},\ q=\frac{z-u}{z+u},\ r=\frac{u-v}{u+v},\ s=\frac{v-w}{v+w},\ t=\frac{w-x}{w+x},$$

то можно вывести слѣдующее равенство:

$$(1+m)(1+p)(1+q)(1+r)(1+s)(1+t)$$
$$=(1-m)(1-p)(1-q)(1-r)(1-s)(1-t).$$

VI. Доказать, что $2y^2+3z^2+6t^2$ есть сумма трехъ квадратовъ.

VII. Упростить выраженіе.

$$\frac{1}{6}[x(x+1)(x+2)+x(x-1)(x-2)]+\frac{3}{2}(x-1)x(x+1).$$

Отв. $\frac{x(11x^2-5)}{6}$.

VIII. Вывести формулу:

$$4[(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab]^2+[(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd]^2=(a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2.$$

IX. Упростить выраженіе.

$$\frac{x(x+1)(x+2)}{3}-\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$

Отв. $\frac{x(x+1)}{2}$.

X. Если сдѣлать въ трехчленѣ.

$$ax^2+2bxy+cy^2$$

подстановки. $x=\alpha x'+\beta y'$ и $y=\gamma x'+\delta y'$, то онъ приметъ видъ.

$$Ax'^2+2Bx'y'+Cy'^2$$

при чемъ мы будемъ имѣть формулу:

$$B^2-AC=(b^2-ac)(\alpha\delta-\beta\gamma)^2.$$

XI. Доказать равенства:

$$1+x^4=(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2});$$
$$1+x^6=(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+x^2-x\sqrt{3}).$$

XII. Полагая $B = b^2 + bc + c^2$ и $C = b^2c + bc^2$, получимъ формулу:

$$4B^3 - 27C^2 = (b - c)^2 (2b^2 + 5bc + 2c^2)^2$$

и слѣдовательно, $4B^3 - 27C^2$ будетъ всегда положительно.

Формулы VIII, X, XI, XII доказываются непосредственно, если выполнить указанныя въ нихъ дѣйствія, тогда обѣ части этихъ равенствъ станутъ тождественными.

XIII. Доказать, что если a и b числа цѣлыя и притомъ заразъ четныя или заразъ нечетныя, то полусумма ихъ квадратовъ есть сумма двухъ квадратовъ.

Доказательство основано на теоремѣ **§ 50**-го.

XIV. Предполагая, что a, b, m суть цѣлыя числа и что выраженіе:

$$a^2 + 2mb^2$$

представляетъ полный квадратъ, доказать, что $a^2 + mb^2$ есть сумма двухъ квадратовъ.

Прилагается та же теорема.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Алгебраическое дѣленіе

§ 52. Частное, происходящее отъ дѣленія алгебраическаго выраженія A на алгебраическое выраженіе B, обозначаютъ такъ: проводятъ горизонтальную черту и пишутъ надъ нею дѣлимое, а подъ нею дѣлителя, т.-е. пишутъ $\frac{A}{B}$; весьма часто это выраженіе невозможно преобразовать въ болѣе простое.

Если A и B имѣютъ общія буквы, то иногда частное можно упростить, и тогда говорятъ, что *выполнили* дѣленіе. Съ этой точки зрѣнія мы разсмотримъ дѣленіе одночленовъ и многочленовъ, выведемъ правила для всѣхъ случаевъ и разсмотримъ въ то же время условія, при которыхъ выполнимо самое дѣленіе.

§ 53. Алгебраическое дѣленіе представляетъ три случая: 1) дѣленіе одночлена на одночленъ, 2) дѣленіе многочлена на одночленъ и 3) дѣленіе многочлена на многочленъ.

I. Дѣленіе одночленовъ

§ 54. Правило дѣленія. — Пусть требуется раздѣлить $75a^7b^4c^2d$ на $25a^3bc^2$. *Предположимъ*, что существуетъ такой цѣлый одночленъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, даетъ дѣлимое. Тогда по правилу умноженія (**§ 28**) коэффиціентъ 75 дѣлимаго долженъ быть произведеніемъ коэффиціента 25 дѣлителя на коэффиціентъ частнаго: слѣдовательно, послѣдній получится отъ раздѣленія 75 на 25, т.-е. будетъ равенъ 3. По тому же самому правилу показатель 7 буквы a въ дѣлимомъ долженъ быть суммою показателя 3 той же буквы въ дѣлителѣ и показателя той же буквы въ частномъ: слѣдовательно, послѣдній получится отъ вычитанія 3 изъ 7, т.-е. будетъ равенъ 4. Также получимъ и показатель буквы b: онъ будетъ равенъ 3. Буква c входитъ какъ въ дѣлимое, такъ и въ дѣлитель съ однимъ и тѣмъ же показателемъ 2, поэтому въ частномъ ея вовсе не будетъ. Буква d входитъ только въ дѣлимое, поэтому она должна явиться въ частномъ съ своимъ показателемъ 5. Частное такимъ образомъ будетъ $3a^4b^3d^5$.

Это разсужденіе относится до всякихъ одночленовъ и приводитъ къ такому правилу:

Чтобы раздѣлить какой-нибудь цѣлый одночленъ на другой 1) дѣлятъ коэффиціентъ дѣлимаго на коэффиціентъ дѣлителя; 2) пишутъ по разу каждую изъ буквъ, входящихъ въ дѣлимое съ съ показателемъ большимъ, чѣмъ въ дѣлитель, и 3) надъ каждою изъ этихъ буквъ ставятъ показателей, равныхъ разностямъ ихъ показателей въ обоихъ одночленахъ. Буквы, встрѣчающіяся только въ дѣлимомъ, пишутся въ частномъ со своими показателями.

§ 55. Условія выполнимости дѣленія. Мы предположили заранѣе, что частное есть нѣкоторый цѣлый одночленъ. Такое предположеніе будетъ имѣть мѣсто всякій разъ, когда *коэффиціентъ дѣлимаго будетъ дѣлиться на коэффиціентъ дѣлителя*, когда *всѣ буквы дѣлителя войдутъ также и въ дѣлимое* и когда, наконецъ, *показатель каждой изъ нихъ въ дѣлителѣ будетъ не болѣе соотвѣтственнаго показателя въ дѣлимомъ*. Дѣйствительно, если эти условія выполнены, мы можемъ, прилагая правило **§ 54**-го найти такой цѣлый одночленъ, который, будучи умноженъ ко дѣлителя, дастъ дѣлимое. Этотъ одночленъ и будетъ *искомымъ частнымъ*.

Но если одно или нѣсколько изъ этихъ трехъ условій не выполнены, то *невозможно* будетъ получить частное подъ видомъ цѣлаго одночлена. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы частное существовало подъ этимъ видомъ, предыдущія разсужденія и самое правило стали бы приложимы и всѣ три условія должны были бы быть выполненными.

Слѣдовательно, эти условія являются необходимыми и достаточными, чтобы дѣленіе цѣлыхъ одночленовъ было бы возможнымъ.

§ 56. Показатель нуль. — По только-что выведенному правилу показатель буквы a въ частномъ будетъ $m - n$, если показатель ея въ дѣлимомъ былъ m, а въ дѣлителѣ n, при чемъ предполагается, что $m > n$. Если же $m = n$, то буквы a въ частномъ не будетъ, и правило вычитанія показателей болѣе не будетъ приложимо. Если же согласиться и въ этомъ случаѣ примѣнять то же правило вычитанія показателей, то мы получимъ a^{m-m} или a^0; а такъ какъ частное отъ раздѣленія a^m на a^m, очевидно, даетъ 1, то мы для сохраненія общности за правиломъ вычитанія показателей вводимъ *соглашеніе, что a^0 даетъ* 1, *каково бы ни было a.* Поэтому можно написать:

$$75a^5b^4c^2d^5 : 25a^1bc^2 = 3a^4b^3c^0d^5,$$

и это послѣднее частное не будетъ отличаться отъ перваго, потому что множитель $c^0 = 1$. При этомъ соглашеніи появятся въ частномъ и тѣ буквы, которыя иначе совсѣмъ исчезли-бы.

Дальше мы разсмотримъ подробнѣе это соглашеніе, имѣющее связь съ обобщеніемъ показателей.

II. Дѣленіе многочлена на одночленъ

§ 57. Правило дѣленія. Частное отъ дѣленія многочлена на одночленъ никогда не можетъ быть одночленомъ, потому что произведеніе двухъ одночленовъ даетъ всегда одночленъ (**§ 28**). Такимъ образомъ, если частное существуетъ въ видѣ *цѣлаго* алгебраическаго выраженія, то послѣднее непремѣнно должно быть многочленомъ. Слѣдовательно, самое дѣйствіе будетъ состоять въ этомъ случаѣ въ нахожденіи такого многочлена, который, будучи умноженъ на одночленный дѣлитель, дастъ многочленное

дѣлимое. Но мы видѣли (**§ 30**), что произведенie многочлена на одночленъ есть сумма произведенiй каждаго члена множимаго на множитель. Отсюда заключаемъ, что *искомое частное получится, если раздѣлить каждый членъ дѣлимаго на дѣлитель, сохраняя при каждомъ отдѣльномъ частномъ тотъ знакъ, какой былъ въ соотвѣтствующемъ членѣ дѣлимаго.* Напримѣръ,

$$(36a^4x^5 - 24a^5x^6 + 28a^5x^2) : 4a^3x^2 = 9ax^3 - 6x^4 + 7a^2.$$

§ 58. Условiя выполнимости дѣленiя. — *Если каждый членъ дѣлимаго въ отдѣльности дѣлится на дѣлитель*, то частнымъ, очевидно, будетъ цѣлый многочленъ, получаемый по предыдущему правилу; слѣдовательно, этого условiя *достаточно*. Самый же выводъ правила показываетъ, что это условiе и *необходимо*.

III. Дѣленiе многочленовъ

§ 59. Весьма рѣдко удается *выполнить* дѣленiе одного многочлена на другой, т.-е. *найти такой третiй многочленъ, который, будучи умноженъ на второй, далъ бы первый.* Однако, если дѣлимое и дѣлитель содержатъ общую букву, то *иногда* можно представить частное въ видѣ многочлена. Предположимъ, что оба многочлена расположены по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, и постараемся, *если только это возможно*, получить частное въ видѣ нѣкотораго многочлена, расположеннаго такимъ же образомъ.

Самый процессъ дѣленiя основанъ на слѣдующихъ теоремахъ:

§ 60. Теорема I. — *Если два многочлена расположены по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, а частное отъ дѣленiя ихъ другъ на друга также многочленъ, расположенный по степенямъ той же буквы, то первый членъ такого частнаго равенъ частному отъ дѣленiя перваго члена дѣлимаго на первый членъ дѣлителя.*

Въ самомъ дѣлѣ, частное, умноженное на дѣлитель, должно давать дѣлимое; первый же членъ произведенiя двухъ многочленовъ, расположенныхъ заразъ по убывающимъ или возрастающимъ степенямъ одной и той же буквы, равенъ произведенiю первыхъ членовъ каждаго изъ нихъ (**§ 45**). Отсюда заключаемъ, что первый членъ дѣлимаго есть произведенiе перваго члена частнаго на первый членъ дѣлителя, и, слѣдовательно, для полученiя пер-

ваго члена частнаго слѣдуетъ раздѣлить первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя.

Кстати замѣтимъ, что первый членъ частнаго будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, будутъ ли первые члены дѣлимаго и дѣлителя одинаковыхъ или разныхъ знаковъ (§ 41).

§ 61. Теорема II. — *Если умножить дѣлитель на первый членъ частнаго и полученное произведеніе вычесть изъ дѣлимаго, то получимъ остатокъ, который, будучи раздѣленъ на дѣлителя, дастъ сумму остальныхъ членовъ частнаго.*

Въ самомъ дѣлѣ, дѣлимое равно произведенію дѣлителя на частное. Если же вычесть изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на одинъ изъ членовъ частнаго, то въ остаткѣ будетъ произведеніе дѣлителя на сумму остальныхъ членовъ частнаго: слѣдовательно, эта сумма явится частнымъ отъ дѣленія остатка на дѣлитель.

§ 62. Правило. — Эти двѣ теоремы даютъ возможность довести дѣленіе до конца. По первой теоремѣ получается первый членъ частнаго, а по второй теоремѣ разысканіе всѣхъ остальныхъ членовъ частнаго сводится къ новому дѣленію. Пользуясь при этомъ новомъ дѣленіи опять первою теоремою, можно найти первый членъ новаго частнаго, т.-е. второй членъ искомаго частнаго, а разысканіе остальныхъ членовъ по 2-ой теоремѣ сведется къ третьему дѣленію и т. д. Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило:

Чтобы раздѣлить одинъ многочленъ на другой, располагаютъ ихъ предварительно по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, дѣлятъ затѣмъ первый членъ дѣлимаго на первый членъ дѣлителя и получаютъ первый членъ частнаго. Умножаютъ дѣлитель на найденный членъ частнаго и произведеніе вычитаютъ изъ дѣлимаго, для чего измѣняютъ знаки у всѣхъ членовъ этого произведенія и дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ. Послѣ этого дѣлятъ первый членъ остатка на первый членъ дѣлителя и получаютъ второй членъ частнаго. Умножаютъ дѣлитель на этотъ второй членъ и произведеніе вычитаютъ изъ остатка. Получаютъ такимъ образомъ второй остатокъ, первый членъ котораго дѣлятъ на первый членъ дѣлителя и получаютъ третій членъ частнаго. Умножаютъ дѣлитель на этотъ третій членъ и произведеніе вычитаютъ изъ второго остатка. И такъ продолжаютъ до тѣхъ поръ, пока не получатъ въ остаткѣ нуль.

Многочленъ, члены котораго мы получили такимъ образомъ одинъ за другимъ, есть искомое частное, потому что по этому пра-

вилу мы вычитали изъ дѣлимаго послѣдовательно произведенія дѣлителя на различные члены этого многочлена и въ результатѣ получили нуль. Отсюда вытекаетъ, что дѣлимое должно быть произведеніемъ дѣлителя на этотъ многочленъ, иначе говоря, послѣдній и есть частное.

§ 63. Примѣръ I. — Пусть требуется раздѣлить $x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$ на x^2+x-1. Пишемъ дѣлитель съ правой стороны дѣлимаго, отдѣляя ихъ другъ отъ друга вертикальною чертою и производимъ дѣленіе.

Дѣлимое. . . .	$x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$	x^2+x-1 дѣлитель
	$-x^5-x^4+x^3$	x^3+5x^2+1 частное
1-ый остатокъ. . . .	$5x^4+5x^3-4x^2+x-1$	
	$-5x^4-5x^3+5x^2$	
2-ой остатокъ. . .	x^2+x-1	
	$-x^2-x+1$	
	0	

Первый членъ частнаго есть x^3, происшедшее отъ дѣленія x^5 на x^2. Произведеніе дѣлителя на x^3 есть $x^5+x^4-x^3$, измѣнивъ знакъ у этого произведенія, пишемъ его подъ дѣлимымъ и сводимъ такимъ образомъ вычитаніе къ простому приведенію подобныхъ членовъ, послѣ чего получаемъ первый остатокъ $5x^4+5x^3-4x^2+x-1$.

Второй членъ частнаго есть $5x^2$, происшедшее отъ дѣленія $5x^4$ на x^2. Умножаемъ дѣлитель на $5x^2$ и получаемъ $5x^4+5x^3-5x^2$. Измѣнивъ знакъ у этого произведенія, подписываемъ его подъ первымъ остаткомъ и дѣлаемъ приведеніе. Получаемъ второй остатокъ x^2+x-1

Третій членъ частнаго есть 1, полученная отъ дѣленія x^2 на x^2. Умноживъ дѣлитель на 1 и вычтя это произведеніе изъ 2-го остатка, получимъ 0. Слѣдовательно, искомое частное будетъ

$$x^3+5x^2+1$$

Слѣдуетъ привыкнуть заразъ производить умноженіе каждаго члена дѣлителя на найденный членъ частнаго, вычитаніе полученныхъ произведеній изъ соотвѣтствующихъ членовъ дѣлимаго и приведеніе подобныхъ членовъ. Тогда вычисленіе расположится въ слѣдующей краткой таблицѣ:

Дѣлимое. . . .	$x^5+6x^4+4x^3-4x^2+x-1$	x^2+x-1 дѣлитель
1-ый остатокъ. . .	$5x^4+5x^3-4x^2+x-1$	x^3+5x^2+1 частное
2-ой остатокъ. . . .	x^2+x-1	
	0	

Примѣръ II.—Коэффиціенты главной буквы суть буквенные одночлены. Пусть, напримѣръ, требуется раздѣлить многочленъ.

$$15a^8-9a^7b-25a^6b^2+19a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8$$

на многочленъ:

$$3a^3-5ab^2+2b^3.$$

Мы приведемъ здѣсь только таблицу вычисленій:

Дѣлимое.	$15a^8-9a^7b\ \ 25a^6b^2+19a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6\ \ 5ab^7+2b^8$	$3a^3-5ab^2+2b^3$ дѣлитель
1-ый остатокъ. . . .	$-9a^7b\ \ +9a^5b^3-6a^4b^4+13a^3b^5-4a^2b^6\ \ 5ab^7+2b^8$	$5a^5-3a^4b-2a^2b^3+b^5$ частное
2-й остатокъ. . . .	$-6a^5b^3\ \ +13a^3b^5-4a^2b^6-5ab^7+2b^8$	
3-й остатокъ. . . .	$+3a^3b^5\ \ -5ab^7+2b^8$	

§ 64. Примѣръ III.— Предыдущее правило не требуетъ, чтобы коэффиціенты при степеняхъ главной буквы были непремѣнно или численные, или одночлены. Эти коэффиціенты могутъ быть многочленами (§ 43), при чемъ останутся въ силѣ всѣ предыдущія разсужденія и самый процессъ дѣленія нисколько отъ этого не измѣнится. Только когда коэффиціенты перваго члена дѣлимаго и перваго члена дѣлителя суть многочлены, то при полученіи каждаго члена частнаго придется производить еще частныя дѣленія.

Покажемъ это на слѣдующемъ примѣрѣ:

Дѣлимое	a^3 $-3a^2b$ $+3ab^2$ $-b^3$	x^5+3a^4 $-5a^3b$ $+2a^2b^2$ $-3ab^3$ $+3b^4$	x^4+a^4b $-4a^3b^2$ $-2a^2b^3$ $+3ab^4$ $+4b^5$	x^3-3a^6 $+a^5b$ $+10a^3b^3$ $-3a^2b^4$ $+ab^5$ $-5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$
1-й остатокъ		$+a^4$ $-3a^3b$ $+2a^2b^2$ $+ab^3$ $-b^4$	x^4+a^5 $-3a^3b^2$ $-3a^2b^3$ $+2ab^4$ $+5b^5$	x^3-3a^6 $+a^5b$ $+7a^3b^3$ $+2a^2b^4$ $-ab^5$ $+5b^6$	x^2+a^7 $+a^5b^2$ $+2a^4b^3$ $-6a^3b^4$ $-2a^2b^5$ $+2ab^6$ $+b^7$	$x-3a^5b^3$ $+2a^4b^4$ $+3a^2b^6$ $-2ab^7$

a^2 $-2ab$ $+b^2$	x^3+2a^3 $-4b^3$	x^2-a^4 $-a^2b^2$ $+b^4$	$x+3a^2b^3$ $-2ab^4$	дѣли-тель
a $-b$	x^2+a^2 $-ab$ $-b^2$	$x-a^3$ $+b^3$		част-ное

2-й остатокъ

$-a^5$	$x^8 - 2a^8$	$x^7 + a^7$	$x \quad 3a^5b^3$
$+2a^4b$	$+6a^5b^3$	$+a^5b^2$	$+2a^4b^4$
a^3b	$4b^8$	a^4b^3	$+3a^3b^4$
$+a^2b^3$		a^3b^4	$2ab^7$
$2ab^4$		a^2b^6	
$+b^5$		$+b^7$	
	0		

1-ое частное дѣленіе

$$a^3 \quad 3a^2b + 3ab^2 \quad b^3 \mid a^2 \quad 2ab + b^2$$
$$a^2b + 2ab^2 - b^3 \mid a \quad b$$
$$0$$

2-ое частное дѣленіе.

$$a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 \quad b^4 \mid a^2 - 2ab + b^2$$
$$a^3b + a^2b^2 + ab^3 \quad b^4 \mid a^2 - ab \quad b$$
$$- a^2b^2 + 2ab^3 - b^4$$
$$0$$

3-е частное дѣленіе:

$$- a^5 + 2a^4b \quad a^3b^2 + a^2b^3 - 2ab^4 + b^5 \mid a - 2ab + b^2$$
$$+ a^2b^3 - 2ab^4 + b^5 \mid a^3 + b^3$$
$$0$$

Въ этомъ случаѣ дѣлятъ сначала коэффиціентъ перваго члена дѣлимаго, т.-е. $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$ на коэффиціентъ перваго члена дѣлителя, т. е. на $(a^2 - 2ab + b^2)$, что и будетъ первымъ частнымъ дѣленіемъ. Получаемъ $(a - b)$. При дѣленіи x^5 на x^3 получаемъ x^2. Слѣдовательно, первый членъ частнаго будетъ $(a - b)x^2$ Умножаемъ дѣлитель на этотъ членъ, при чемъ выполняемъ нѣсколько умноженій съ многочленами, и вычитаемъ произведеніе изъ дѣлимаго; получаемъ первый остатокъ. Далѣе, мы должны раздѣлить коэффиціентъ перваго члена остатка, т.-е. $a^4 - 3a^3b + 2a^2b^2 + ab^3 - b^4)$ на $(a^2 - 2ab + b^2)$; это—второе частное дѣленіе. Получаемъ $(a^2 - ab + b^2)$. Слѣдовательно, второй членъ частнаго будетъ $(a^2 - ab - b^2)x$. Умноживъ дѣлитель на этотъ членъ и вычтя произведеніе, получимъ новый остатокъ, съ которымъ поступаемъ такъ же, какъ съ предыдущимъ. Такимъ образомъ получаемъ искомое частное.

§ 65. Условія выполнимости дѣленія многочлена на многочленъ. — Предыдущія разсужденія предполагаютъ заранѣе, что частное получится въ видѣ многочлена, а между тѣмъ, приступая къ самому процессу дѣленія, очень часто не знаютъ, представится ли частное въ такомъ видѣ. Слѣдовательно, весьма важно установить тѣ признаки, по которымъ заранѣе можно сказать, возможно ли частное въ этомъ видѣ. Такіе признаки даетъ уже самый процессъ дѣленія.

Въ самомъ дѣлѣ, если дѣленіе возможно, то

1. *Первый членъ дѣлимаго долженъ дѣлиться на первый членъ дѣлителя, также послѣдній членъ дѣлимаго — на послѣдній членъ дѣлителя* (**§ 45**).

2. *Первый членъ каждаго остатка долженъ дѣлиться на первый членъ дѣлителя*, потому что первый членъ каждаго остатка есть не что иное, какъ произведеніе перваго члена дѣлителя на одинъ изъ членовъ частнаго.

3. *Послѣ нѣсколькихъ послѣдовательныхъ частныхъ дѣленій долженъ получиться въ частномъ такой членъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, далъ бы то частное дѣлимое, изъ котораго онъ самъ былъ полученъ*, такъ какъ въ концѣ концовъ долженъ получиться въ остаткѣ нуль.

Эти условія — необходимы: въ самомъ дѣлѣ, если хоть одно изъ нихъ не будетъ выполнено, частное не явится уже въ видѣ многочлена, такъ какъ въ этомъ случаѣ самый процессъ дѣленія невозможенъ.

Эти условія — достаточны: въ самомъ дѣлѣ, если они выполнены, то, очевидно, становится возможнымъ самый процессъ дѣле-

нія, дающій въ частномъ такой многочленъ, который, будучи умноженъ на дѣлителя, даетъ дѣлимое.

§ 66. Признаки, по которымъ опредѣляютъ, возможно ли выполнить дѣленіе, или нѣтъ. — Принимая во вниманіе предположеніе **§ 59**-го, что наши многочлены расположены по убывающимъ степенямъ одной и той же буквы, замѣчаемъ, что показатели ея въ первыхъ членахъ каждаго остатка идутъ все время убывая, потому что въ каждомъ частномъ дѣлимомъ послѣ приведенія исчезаетъ, по крайней мѣрѣ, первый членъ. Слѣдовательно, продолжая самый процессъ дѣленія все далѣе и далѣе, *мы неизбѣжно придемъ къ такому остатку, первый членъ котораго будетъ содержать главную букву въ степени низшей, чѣмъ первый членъ дѣлителя.* Если этотъ остатокъ равенъ нулю, дѣленіе будетъ выполнено; если же онъ не равенъ нулю, дѣленіе становится невозможнымъ.

Кстати замѣтимъ, что иногда, прежде чѣмъ придти къ такому остатку, уже приходится убѣдиться въ невозможности дѣленія. Въ самомъ дѣлѣ, если *первый членъ одного изъ предыдущихъ остатковъ не раздѣлится на первый членъ дѣлителя, дѣленіе невозможно.*

Примѣръ IV. — Пусть требуется раздѣлить $x^5 + 5x^4 + 2x^3$ на $x^2 + x$

Дѣлимое . .	$x^5 + 5x^4 + 2x^3$	$x^2 + x$	дѣлитель
	$+ 4x^4 + 2x^3$	$x^3 + 4x^2 - 2x + 2$	частное
	$2x^3$		
	$+ 2x^2$		
	$- 2x$		

Рядъ вычисленій приводитъ къ остатку $2x$, который уже не дѣлится на x^2; слѣдовательно, дѣленіе невозможно.

Есть еще признакъ, по которому можно судить, гдѣ слѣдуетъ остановиться и не производить дальнѣйшихъ вычисленій, если дѣленіе на самомъ дѣлѣ не можетъ быть выполнено. Дѣйствительно, если дѣленіе возможно, то послѣдній членъ дѣлимаго долженъ быть произведеніемъ послѣдняго члена дѣлителя на послѣдній членъ частнаго (**§ 45**). Отсюда вытекаетъ, что послѣдній членъ частнаго можно опредѣлить непосредственно, дѣля послѣдній членъ дѣлимаго на послѣдній членъ дѣлителя. Итакъ, *если при послѣдовательномъ вычисленіи членовъ частнаго получится такой, степень котораго ниже степени члена, вычисленнаго по вышеуказанному способу, то можно утверждать, что дѣленіе не окончится*, и что частное не можетъ

быть представлено въ видѣ многочлена. *Къ тому же заключенію, т.-е. что дѣленіе не окончится, мы должны придти и тогда, когда получимъ въ частномъ членъ степени такой же, какъ и вычисленный по вышеуказанному способу, но не тождественный съ нимъ.*

Въ IV-мъ примѣрѣ, если бы частное существовало, послѣдній членъ долженъ былъ быть $2x^2$, т.-е. частное отъ дѣленія $2x^3$ на x. Первый же членъ $4x^4$ перваго остатка, раздѣленный на x^2, даетъ въ частномъ $4x^2$. Не производя дальнѣйшихъ вычисленій, можно сказать, что дѣленіе не окончится.

§ 67. Дѣленіе многочленовъ, расположенныхъ по возрастающимъ степенямъ какой-нибудь буквы. — Въ нѣкоторыхъ случаяхъ члены многочлена располагаютъ по возрастающимъ степенямъ какой-нибудь буквы. Если два многочлена расположены такимъ образомъ, то можно производить дѣленіе ихъ другъ на друга и получить всѣ члены частнаго, начиная съ тѣхъ, куда главная буква входитъ въ наименьшей степени. Теорія дѣленія остается такою же, какъ и въ случаѣ дѣленія многочленовъ, расположенныхъ по убывающимъ степенямъ главной буквы: только здѣсь, если дѣленіе не можетъ быть выполнено точно, процессъ дѣленія можетъ продолжаться безконечно, а самые остатки при этомъ таковы, что степени ихъ все растутъ, между тѣмъ какъ въ случаѣ дѣленія многочленовъ, расположенныхъ по убывающимъ степенямъ главной буквы, степени остатковъ уменьшаются.

Приведемъ тотъ же примѣръ, что въ § 63-мъ, расположивъ оба многочлена по возрастающимъ степенямъ буквы x.

Примѣръ V.

Дѣлимое . . . $1+x+4x^2+4x^3+6x^4+x^5$ | $1+x+x^2$ дѣлитель

$5x^2+4x^3+6x^4+x^5$ | $+1+5x^2+x^3$ частное

$-x^3+x^4+x^5$

Мы можемъ разсуждать такъ: членъ дѣлимаго, содержащій x въ наименьшей степени, является произведеніемъ двухъ такихъ же членовъ дѣлителя и частнаго, потому что дѣлимое есть произведеніе дѣлителя на частное и въ немъ даже до приведенія этотъ членъ не будетъ имѣть себѣ подобныхъ (§ 46); слѣдовательно, первый членъ частнаго получится отъ дѣленія перваго члена дѣлимаго на первый членъ дѣлителя и будетъ $+1$.

Совершенно такъ же, какъ въ § 61-мъ, докажемъ, что, вычитая изъ дѣлимаго произведеніе дѣлителя на первый членъ частнаго, получимъ

остатокъ: $-5x^2 + 4x^3 + 6x^4 + x^5$, который, будучи раздѣленъ на дѣлителя, дастъ остальные члены частнаго.

Слѣдовательно, первый изъ оставшихся членовъ частнаго по предыдущему получится отъ дѣленія $-5x^2$ на -1 и будетъ $+5x^2$.

Умножая $+5x^2$ на дѣлитель и произведенie вычитая изъ перваго остатка, получаемъ второй остатокъ $-x^3 + x^4 + x^5$, который, будучи раздѣленъ на дѣлитель, дастъ остальные члены частнаго.

Слѣдовательно, первый изъ оставшихся членовъ частнаго по предыдущему будетъ равенъ частному отъ дѣленія $-x^3$ на -1, т.-е. будетъ $+x^3$; умножая его на дѣлитель и произведенie вычитая изъ послѣдняго остатка, получимъ нуль. Такимъ образомъ дѣленie окончено.

§ 68. Признакъ невозможности дѣленія въ томъ случаѣ, когда многочлены расположены по возрастающимъ степенямъ главной буквы.— Въ предыдущемъ примѣрѣ дѣленie было окончено и результатъ получился, какъ и слѣдовало ожидать, совершенно такой же, какъ и въ случаѣ расположенія многочленовъ по убывающимъ степенямъ главной буквы. Результатъ получится другой, если дѣленie не можетъ быть выполнено точно. Пусть, напримѣръ, требуется раздѣлить $(1 + x + x^2 + 2x^3)$ на $(1 + 2x)$:

Примѣръ VI:

Дѣлимое	$1 + x + x^2 + 2x^3$	$1 + 2x$	дѣлитель
	$x + x^2 + 2x^3$	$x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$	частное
	$+3x^2 + 2x^3$		
	$-4x^3$		
	$+5x^4$		

Употребляя въ этомъ примѣрѣ обычный пріемъ дѣленія и разсматривая первый членъ въ каждомъ изъ послѣдовательныхъ остатковъ, замѣчаемъ, что въ этихъ членахъ показатель главной буквы идетъ, все время увеличиваясь; кромѣ того, мы видимъ, что первый членъ каждаго остатка непремѣнно дѣлится на первый членъ дѣлителя. Отсюда заключаемъ, что первый признакъ невозможности дѣленія (**§ 66**) здѣсь не приложимъ.

Но за то имѣетъ мѣсто другой признакъ, аналогичный 2-му **§ 66**-го; онъ всегда существуетъ тамъ, гдѣ дѣленie не можетъ быть выполнено. Въ самомъ дѣлѣ, если дѣленie выполнимо, то послѣдній членъ дѣлимаго есть произведенie послѣдняго члена частнаго на послѣдній членъ дѣлителя; слѣдовательно, послѣдній членъ частнаго получится непосредственно отъ дѣленія послѣдняго члена дѣлимаго на послѣдній членъ дѣлителя. Сверхъ того, мы замѣчаемъ,

что степень членовъ частнаго по отношенію къ главной буквѣ все время повышается. Отсюда вытекаетъ, что, *если въ частномъ получится членъ такой же степени, какъ и вычисленный непосредственно послѣдній членъ частнаго, но не тождественный съ нимъ, или же членъ степени высшей, можно утверждать, что дѣленіе* [illegible]

Въ VI-омъ примѣрѣ, если бы существовало частное, его послѣдній членъ былъ бы x^2, происходящій отъ дѣленія $2x^3$ на $2x$; слѣдовательно, съ появленіемъ въ частномъ члена $+ 3x^2$ дальнѣйшаго дѣленія производить нѣтъ надобности: дѣленіе не можетъ быть окончено.

Изъ предыдущаго видно, что во всѣхъ случаяхъ самый процессъ дѣленія неизбѣжно ведетъ къ опредѣленнымъ признакамъ возможности или невозможности.

IV. Дѣленія, которыя не могутъ быть выполнены точно

§ 69. Опредѣленія. — Говорятъ, что многочленъ — *цѣлый* относительно буквы x, если онъ не содержитъ ея ни въ знаменателѣ, ни подъ знакомъ $\sqrt{\ }$. Такъ, напримѣръ, выраженіе:

$$\frac{3a^2x^3}{4} - \frac{2b^3x^2}{5a} + 3x\sqrt{c} - \frac{4}{5}.$$

есть многочленъ, цѣлый относительно x.

Если какой-нибудь многочленъ — цѣлый относительно буквы x, то наивысшій показатель послѣдней будетъ *степенью* этого многочлена *относительно* буквы x. Вышеприведенный многочленъ — 3-ей степени *относительно* x.

Говорятъ, что одинъ многочленъ цѣлый относительно x, *дѣлится* на другой, также цѣлый относительно x, если частное выражается многочленомъ такого же вида. Коэффиціенты могутъ быть какіе-угодно. Такъ, напримѣръ, $ax^2 - 3$ дѣлится на $x\sqrt{a} + \sqrt{3}$, частное есть $x\sqrt{a} - \sqrt{3}$.

Если частное двухъ многочленовъ не можетъ быть выражено нѣкоторымъ третьимъ многочленомъ, то говорятъ, что эти многочлены не дѣлятся другъ на друга. Тѣмъ не менѣе, можно и въ этомъ случаѣ, вообще говоря, придать частному видъ болѣе простой, чѣмъ тотъ, когда мы ограничиваемся только указаніемъ дѣйствія дѣленія. Въ самомъ дѣлѣ, мы докажемъ слѣдующія теоремы.

§ 70. Теорема I. — *Если два многочлена A и B суть цѣлые относительно x, при чемъ степень A, по крайней мѣрѣ, равна степени B, можно всегда частное $\frac{A}{B}$ представить подъ видомъ суммы нѣкотораго многочлена Q, цѣлаго относительно x, и нѣкоторой дроби $\frac{R}{B}$, знаменатель которой есть дѣлитель B, а числитель нѣкоторый многочленъ R, цѣлый относительно x и степени низшей, чѣмъ B.*

Дѣйствительно, мы можемъ расположить многочлены A и B по убывающимъ степенямъ буквы x и начать дѣлить обычнымъ порядкомъ (§ 62); такъ какъ въ этомъ случаѣ коэффиціенты частнаго не должны быть непремѣнно цѣлыми, то дѣленіе мы будемъ продолжать до тѣхъ поръ пока не появится остатокъ низшей степени, чѣмъ B. Такимъ образомъ мы получаемъ въ частномъ члены, изъ которыхъ ни одинъ не содержитъ x въ знаменателѣ, потому что частныя дѣлимыя, отъ которыхъ получаются эти члены, всѣ степени высшей или, по крайней мѣрѣ, равной степени B, и первый членъ каждаго изъ этихъ дѣлимыхъ будетъ, поэтому, также степени высшей или, по крайней мѣрѣ, равной степени перваго члена B.

Получивъ частное дѣлимое R, степень котораго ниже степени B, обозначимъ черезъ Q совокупность членовъ, полученныхъ въ частномъ. R получается, какъ остатокъ, послѣ послѣдовательныхъ вычитаній изъ дѣлимаго A произведеній B на различные члены Q; поэтому R равно $A - BQ$ и мы будемъ имѣть:

$$A = BQ + R,$$

откуда, раздѣливъ на B обѣ части этой формулы, получимъ:

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}.$$

Итакъ, частное $\frac{A}{B}$, дѣйствительно, можетъ быть представлено въ томъ видѣ, какъ высказано въ теоремѣ.

§ 71. Теорема II. — *Преобразованіе частнаго $\frac{A}{B}$ въ предыдущій видъ можетъ быть только одно относительно одной и той же главной буквы.*

Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что при дѣленіи A на B въ первый разъ мы получили въ частномъ Q и въ остаткѣ R, а въ другой разъ — въ частномъ Q' и въ остаткѣ R', при чемъ Q и Q' цѣлые относительно x, а R и R' — степени низшей, чѣмъ B. Въ такомъ случаѣ по предыдущему будемъ имѣть:

$$A = BQ + R, \quad A = BQ' + R',$$

откуда

$$BQ + R = BQ' + R'$$

Эту формулу можно преобразовать въ такую:

$$B(Q - Q') = R' - R,$$

гдѣ разность $R' - R$ будетъ степени низшей, чѣмъ B, потому что въ отдѣльности и R', и R — степени низшей, чѣмъ B, между тѣмъ какъ степень $B(Q - Q')$ относительно x, по крайней мѣрѣ, равна такой же степени B. Слѣдовательно, вторая часть равенства — степени низшей, чѣмъ первая, а это — невозможно.

§ 72. Примѣры. — Находимъ при помощи дѣленія

1) $$\frac{x^5 - 2x^3 + x - 1}{x^2 - 3} = x^3 + x + \frac{4x - 1}{x^2 - 3};$$

2) $$\frac{2x^4 + 3x^2 - 5x + 7}{7x^3 + x - 1} = \frac{2}{7}x + \frac{\frac{19}{7}x^2 - \frac{33}{7}x + 7}{7x^3 + x - 1};$$

3) $$\frac{x^2\sqrt{\frac{2}{3}} + 3x - \frac{1}{4}}{3x^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{3x + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}}{3x^2 - \frac{1}{2}}.$$

Если степень многочлена A ниже степени многочлена B, то частное Q будетъ равно нулю, а остатокъ R будетъ равенъ самому дѣлимому.

§ 73. Замѣчаніе. — Представляя частное двухъ многочленовъ въ предыдущемъ видѣ, называютъ многочленъ Q *цѣлымъ частнымъ*, а числитель R дроби $\frac{R}{B}$ *остаткомъ* отъ дѣленія.

§ 74. Случай, когда мѣняется главная буква. — Въ § 71-мъ мы доказали, что при дѣленіи двухъ многочленовъ, расположенныхъ по степенямъ одной и той же буквы x, не можетъ получиться

болѣе одного цѣлаго частнаго и болѣе одного остатка. Но если перемѣнить главную букву, то въ такомъ случаѣ мы можемъ получить и новое частное, и новый остатокъ. Напримѣръ, если въ дроби

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

за главную букву принять x, то въ частномъ мы получимъ x^2-y^2 и въ остаткѣ $2y^4$. Напротивъ, если за главную букву принять y, то въ частномъ найдемъ y^2-x^2, а въ остаткѣ $2x^4$. Слѣдовательно, мы можемъ написать:

$$\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=x^2-y^2+\frac{2y^4}{x^2+y^2},$$

$$\frac{y^4+x^4}{y^2+x^2}=y^2-x^2+\frac{2x^4}{y^2+x^2}.$$

V. Различіе и сходство дѣленія ариѳметическаго и дѣленія многочленовъ

§ 75. Многочлены, расположенные по степенямъ одной и той же буквы, представляютъ большое сходство съ цѣлыми числами. Въ самомъ дѣлѣ, представляя какое-нибудь число, напр., 783214 въ видѣ: $7.10^5+8.10^4+3.10^3+2.10^2+1.10+4$, мы можемъ уподобить его многочлену

$$7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4,$$

въ которомъ $x=10$. Цифры числа выходятъ такимъ образомъ коэффиціентами при членахъ многочлена. Не слѣдуетъ, однако, думать, что всякій ариѳметическій вопросъ, касающійся цѣлыхъ чиселъ, будетъ всегда частнымъ случаемъ алгебраическаго вопроса, въ которомъ вмѣсто нашихъ чиселъ стояли бы соотвѣтствующіе многочлены.

Для сравненія возьмемъ двѣ слѣдующія задачи: 1) раздѣлить 783214 на 321, 2) раздѣлить $7x^5+8x^4+3x^3+2x^2+x+4$ на $3x^2+2x+1$. Условія этихъ задачъ настолько различны между собою, что никакъ нельзя разсматривать первую задачу, какъ частный случай второй:

1. Различныя цифры частнаго при ариѳметическомъ дѣленіи должны быть цѣлыми числами, между тѣмъ какъ частное при алге-

браическомъ дѣленіи представитъ такой полиномъ, который будетъ цѣлымъ относительно x, но коэффиціенты будетъ имѣть дробные.

2. Различныя цифры частнаго и остатка при ариѳметическомъ дѣленіи суть числа < 10, между тѣмъ какъ величина коэффиціентовъ при различныхъ степеняхъ x въ алгебраическомъ дѣленіи ничѣмъ не ограничена.

3. При ариѳметическомъ дѣленіи остатокъ долженъ быть меньше дѣлителя. При алгебраическомъ дѣленіи только степень его меньше степени дѣлителя.

4. Наконецъ, въ алгебрѣ полученные результаты будутъ справедливы для всякихъ значеній x: ничего подобнаго нѣтъ въ ариѳметикѣ.

VI. Теоремы и приложенія

§ 76. Теорема. *Остатокъ отъ дѣленія многочлена, цѣлаго относительно x, на двучленъ $(x - a)$ равенъ самому многочлену, если вмѣсто x подставить въ него a; при этомъ многочленъ располагается по убывающимъ степенямъ буквы x.*

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ дѣлитель $(x - a)$ первой степени, а самое дѣленіе производится до тѣхъ поръ, пока не получится остатокъ степени низшей, чѣмъ дѣлитель, то мы должны дойти до остатка, независимаго отъ x. Обозначимъ дѣлимое черезъ X, частное — черезъ Q, при чемъ оно будетъ цѣлымъ относительно x, и остатокъ — черезъ R. Мы будемъ имѣть слѣдующее тождество, т.-е. равенство, справедливое при всякихъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ него:

$$X = (x - a) Q + R.$$

Умножая $(x - a)$ на Q и къ полученному произведенію прикладывая R, мы должны тождественно получить многочленъ X при всякихъ значеніяхъ x; поэтому мы можемъ положить $x = a$. Въ такомъ случаѣ множитель $(x - a)$ дѣлается равнымъ нулю. Q пріобрѣтаетъ опредѣленное значеніе и, слѣдовательно, произведеніе $(x - a) Q$ дѣлается также равнымъ нулю. Остатокъ же R, какъ не содержащій x, значенія своего при этомъ не измѣнитъ. Итакъ, обозначивъ черезъ X_a то значеніе, которое принимаетъ X послѣ замѣны въ немъ x на a, предыдущее равенство мы можемъ представить въ видѣ:

$$X_a = R,$$

что и требовалось доказать.

§ 77. Слѣдствія: 1) *Если многочленъ X обращается въ нуль послѣ замѣны въ немъ x на a, то онъ дѣлится на $(x - a)$*. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ и остатокъ R также обращается въ нуль.

2) *Если многочленъ X дѣлится на $(x - a)$, то онъ обращается въ нуль послѣ замѣны въ немъ x* на a. Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ X_a, какъ равное R, также обращается въ нуль

Итакъ, *для того чтобы многочленъ, цѣлый относительно x, дѣлился на $(x - a)$, необходимо и достаточно, чтобы онъ обращался въ нуль послѣ замѣны въ немъ x на a.*

§ 78. Это послѣднее предложеніе чрезвычайно важно. Мы ограничимся здѣсь нѣсколькими слѣдствіями, при чемъ m будетъ представлять собою какое-нибудь цѣлое число:

1) $(x^m - a^m)$ *всегда дѣлится на* $(x - a)$. Это — потому, что нашъ многочленъ обращается въ нуль послѣ замѣны въ немъ x на a.

2) $(x^m + a^m)$ *никогда не дѣлится на* $(x - a)$. Это — потому, что послѣ замѣны въ нашемъ многочленѣ x на a получаемъ остатокъ, равный $2a^m$.

3) $(x^m - a^m)$ *дѣлится на* $(x + a)$ *при m четномъ и не дѣлится при m нечетномъ*. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить на $(x + a)$ все равно, что раздѣлить на $[x - (-a)]$, а въ такомъ случаѣ для полученія остатка слѣдуетъ въ нашъ многочленъ подставить $(-a)$ вмѣсто x. Дѣлимое тогда будетъ : $[(-a)^m - a^m]$. Но если m — четное, то по **§ 40-му** $(-a)^m = a^m$, а если m — нечетное, то $(-a)^m = -a^m$. Слѣдовательно, остатокъ является нулемъ въ первомъ случаѣ и $(-2a^m)$ — во второмъ.

4) $(x^m + a^m)$ *дѣлится на* $(x + a)$, *если m — нечетное, и не дѣлится, если m — четное*. Дѣйствительно, послѣ подстановки въ нашемъ дѣлимомъ $(-a)$ вмѣсто x получаемъ $[(-a)^m + a^m]$, а это выраженіе обращается въ нуль только при m нечетномъ и равно $2a^m$ при m четномъ.

§ 79. Законъ составленія частнаго при дѣленіи многочлена на $(x - a)$. — Законъ составленія остатка при дѣленіи многочлена на $(x - a)$ мы уже вывели въ **§ 76-мъ.** Также не трудно вывести законъ составленія частнаго. Представимъ многочленъ въ видѣ: $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m$ и произведемъ самое дѣленіе:

Первый членъ частнаго есть A_0x^{m-1}. Умножая дѣлитель на этотъ членъ и полученное произведеніе вычитая изъ дѣлимаго, получаемъ первый остатокъ, первый членъ котораго есть $(A_0a + A_1)x^{m-1}$, а остальные тѣ же, что и въ дѣлимомъ, начиная съ 3-го. Второй членъ частнаго есть $(A_0a + A_1)x^{m-2}$; для полученія перваго члена второго остатка, необходимо умножить на a второй членъ частнаго и къ этому произведенію прибавить 3-ій членъ дѣлимаго: такимъ образомъ получаемъ $(A_0a^2 + A_1a + A_2)x^{m-2}$. Слѣдовательно 3-ій членъ частнаго будетъ $(A_0a^2 + A_1a + A_2)x^{m-3}$. Продолжая далѣе эти вычисленія, мы приходимъ къ такому закону:

Частное многочлена, цѣлаго относительно x, степени m, при дѣленіи на $(x - a)$ представляетъ собою многочленъ, цѣлый относительно x, степени $(m - 1)$. Оно расположено, какъ и данный многочленъ, по убывающимъ степенямъ x. Коэффиціентъ перваго его члена такой же, какъ и перваго члена дѣлимаго. Для полученія коэффиціента при второмъ членѣ умножаютъ предыдущій на a и къ произведенію прибавляютъ коэффиціентъ второго члена дѣлимаго. Для полученія коэффиціента при 3-емъ членѣ умножаютъ только-что полученный на a и къ произведенію прибавляютъ коэффиціентъ 3-го члена дѣлимаго. И, вообще, коэффиціентъ n-го члена равенъ произведенію предыдущаго коэффиціента на a, увеличенному на коэффиціентъ n-го члена дѣлимаго. Если дѣлимое не представляетъ полнаго многочлена, то необходимо возстановить недостающіе члены, ставя коэффиціентами при нихъ нуль.

Дѣлимое $A_0x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m \mid x - a$ дѣлитель

1-й ост. $\begin{matrix} A_0a \\ + A_1 \end{matrix} x^{m-1} + A_2x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m \mid A_0x^{m-1} + \begin{matrix} A_0a \\ + A_1 \end{matrix} x^{m-2} + \ldots$ частное

2-й ост. $\begin{matrix} + A_0a^2 \\ + A_1a \\ + A_2 \end{matrix} x^{m-2} + \ldots + A_{m-2}x^2 + A_{m-1}x + A_m$

Примѣръ. Найти частное и остатокъ при дѣленіи многочлена $3x^5 - 4x^4 - 2x^2 + 7$ на $x - 2$. По предыдущему закону дѣлимое напишемъ въ видѣ:

$$3x^5 - 4x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 7$$

и тогда въ частномъ получимъ

$$3x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 6x + 12,$$

а въ остаткѣ 31.

Прилагая предыдущій законъ къ примѣрамъ § 78-го, находимъ.

1) $$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1},$$

2) $$\frac{x^m + a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x + a^{m-1} + \frac{2a^m}{x - a},$$

3) $$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots - a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x - a^{m-1}$$

при m четномъ и

$$\frac{x^m - a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-3}x^2 - a^{m-2}x + a^{m-1} - \frac{2a^m}{x + a},$$

при m нечетномъ,

4) $$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots + a^{m-3}x^2 - a^{m-2}x + a^{m-1}$$

при m нечетномъ и

$$\frac{x^m + a^m}{x + a} = x^{m-1} - ax^{m-2} + a^2x^{m-3} - \ldots - a^{m-3}x^2 + a^{m-2}x - a^{m-1} + \frac{2a^m}{x + a}$$

при m четномъ.

Эти формулы, впрочемъ, можно получить и непосредственно — простымъ дѣленіемъ.

§ 80. Теорема. *Если многочленъ A, цѣлый относительно x, обращается въ нуль при замѣнѣ x на a, или на b, или на c, при чемъ a, b, c суть числа, неравныя между собою, — то онъ дѣлится на произведеніе*

$$(x - a)(x - b)(x - c).$$

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ многочленъ A обращается въ нуль при $x = a$, то онъ дѣлится на $(x - a)$ (§ 77). Поэтому, обозначая частное, цѣлое относительно x, черезъ Q, мы можемъ написать:

$$A = (x - a)Q. \qquad (1)$$

Это равенство, будучи справедливо при всякомъ x, будетъ справедливо и при $x = b$; обозначая черезъ Q_b значенie Q при $x = b$, изъ предыдущаго равенства выводимъ:

$$0 = (b - a)\, Q_b$$

По предположенiю b и a — различныя числа и разность $(b - a)$, поэтому, не нуль; слѣдовательно, $Q_b = 0$. Отсюда заключаемъ, что Q дѣлится на $(x - b)$ (§ 77). Обозначая частное черезъ Q', имѣемъ:

$$Q = (x - b)\, Q',$$

а послѣ подстановки въ равенство (1) вмѣсто Q равнаго ему выраженiя получимъ:

$$A = (x - a)(x - b)\, Q'. \qquad (2)$$

Это равенство, будучи справедливымъ при всякомъ x, будетъ справедливо и при $x = c$, а въ такомъ случаѣ оно преобразуется въ равенство:

$$0 = (c - a)(c - b)\, Q'_c,$$

гдѣ Q'_c есть значенiе Q' при $x = c$. А такъ какъ разности $(c - a)$, $(c - b)$ не нули, потому что по предположенiю a, b, c — различныя числа, то Q'_c должно быть нулемъ. Отсюда вытекаетъ, что Q' дѣлится на $(x - c)$. Обозначая новое частное черезъ Q'', имѣемъ:

$$Q' = (x - c)\, Q'',$$

а послѣ подстановки въ равенство (2) вмѣсто Q' равной ему величины получимъ:

$$A = (x - a)(x - b)(x - c)\, Q''. \qquad (3)$$

Слѣдовательно, многочленъ A дѣлится на произведенiе:

$$(x - a)(x - b)(x - c).$$

УПРАЖНЕНIЯ

I. Найти условiе необходимое и достаточное, чтобы $(x^m - a^m)$ дѣлилось на $(x^n - a^n)$.

Отв. Необходимо и достаточно, чтобы m дѣлилось на n.

II. Показать, что многочленъ:

$$x^q y^r + y^q z^r + z^q x^r - x^r y^q - y^r z^q - z^r x^q$$

дѣлится на произведенiе: $(x - y)(x - z)(y - z)$.

III. Показать, что многочленъ:

$$x^p y^q z^r + y^p z^q x^r + z^p x^q y^r - x^r y^q z^p - y^r z^q x^p - z^r x^q y^p$$

дѣлится на то же самое произведенiе

IV. Показать, что если m — нечетное, то многочленъ:

$$(a+b+c)^m - a^m - b^m - c^m$$

дѣлится на произведенiе: $(a+b)(a+c)(b+c)$.

Отв. Доказательство упражненiй II, III, IV основывается на теоремѣ **§ 80**-го.

V. Если многочленъ, цѣлый относительно x, имѣетъ коэффицiентами цѣлыя числа и если онъ принимаетъ численныя значенiя нечетныя при послѣдовательныхъ замѣнахъ x на 0 и на 1, то онъ не можетъ обратиться въ нуль ни при какомъ цѣломъ значенiи x

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Алгебраическiя дроби

§ 81. Опредѣленiя. — Если выраженiе A не дѣлится на выраженiе B, то частное, какъ мы видѣли (**§ 52**) представляютъ подъ видомъ $\frac{A}{B}$. Такое выраженiе называется *алгебраическою дробью* и дѣлимое A будетъ *числителемъ*, а дѣлитель B — *знаменателемъ* этой дроби. Какъ A, такъ и B называются *членами* дроби.

Алгебраическая дробь есть обобщенiе ариѳметической, потому что члены послѣдней суть не что иное, какъ члены первой, но при условiи, чтобы эти члены были цѣлыми числами. Мы сейчасъ покажемъ, что правила всѣхъ дѣйствiй для дробей того и другого рода будутъ одни и тѣ же.

I. Преобразованiе алгебраическихъ дробей

§ 82. Теорема. — *Значенiе алгебраической дроби не измѣняется отъ умноженiя числителя и знаменателя на одно и то же количество.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $\frac{a}{b}$ — данная дробь и m — то количество, на которое будемъ умножать числителя и знаменателя. Обозначимъ черезъ q частное отъ дѣленiя a на b. Изъ самого опредѣленiя дроби вытекаетъ, что

$$a = bq.$$

Умножая эти два равныя количества на одно и то же число m, получимъ:

$$am = bqm = bmq;$$

дѣля же оба равныя произведенія на bm, будемъ имѣть равенство:

$$\frac{am}{bm} = q, \quad \text{или} \quad \frac{am}{bm} = \frac{a}{b}, \qquad (1)$$

что и доказываетъ теорему.

Изъ формулы (1) *видно, что значеніе дроби не измѣняется отъ раздѣленія числителя и знаменателя на одно и то же количество.*

Такимъ образомъ основной принципъ въ алгебрѣ такой же, какъ и въ ариѳметикѣ, а потому и слѣдствія будутъ такія же.

§ 83. Упрощеніе дробей. — *Алгебраическую дробь можно упростить, сократив числителя и знаменателя на ихъ общихъ множителей* **(§ 82).**

Когда члены дроби суть одночлены, то всегда легко найти ихъ общихъ множителей.

Пусть, напримѣръ, дана дробь $\frac{36a^4b^3c^2d}{28ab^5cd^3}$. Общій наибольшій коэффиціентъ есть 4; что же касается до общихъ буквенныхъ множителей, то очевидно, таковыми будутъ: одинъ множитель a, три множителя b, одинъ множитель c и одинъ множитель d. Сокращая на всѣхъ этихъ множителей, получаемъ упрощенную дробь $\frac{9a^3c}{7b^2d^2}$.

Когда члены дроби суть многочлены, то все еще легко непосредственно найти ихъ общихъ множителей-одночленовъ.

Пусть, напримѣръ, дана дробь $\frac{12a^4b^3 - 8a^3b^2}{16a^5b - 20a^2b^4}$. Замѣчаемъ общій множитель-одночленъ $4a^2b$ и сокращаемъ на него:

$$\frac{3a^2b^2 - 2ab}{4a^3 - 5b^3}$$

Но не такъ легко открыть общихъ многочленныхъ множителей: разысканіе ихъ связано съ теоріею общаго наибольшаго алгебраическаго дѣлителя, что уже составляетъ предметъ высшей алгебры. Однако, иногда можно по частнымъ признакамъ найти ихъ.

Пусть, напримѣръ, дана дробь

$$\frac{a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 7a + 4}{a^2 + 5a - 6}$$

Замѣчаемъ, что числитель и знаменатель обращаются въ нуль при $a = 1$, а въ такомъ случаѣ они дѣлятся на $(a - 1)$ (§ 77). По сокращеніи на $(a - 1)$ дробь приметъ видъ.

$$\frac{a^3 - a^2 + 3a - 4}{a + 6}$$

Пусть будетъ дана другая дробь

$$\frac{8a^2c^2d^3 - 72b^2c^2d^3}{6ac^3d^2 - 18bc^3d^2}$$

Выносимъ множитель-одночленъ, общій для всѣхъ членовъ числителя, за скобки и такое же преобразованіе дѣлаемъ въ знаменателѣ; дробь послѣ этого приметъ видъ:

$$\frac{8c^2d^3(a^2 - 9b^2)}{6c^3d^2(a - 3b)}$$

Теперь легко замѣтить, что $2c^2d^2\,(a - 3b)$ будетъ общимъ множителемъ какъ для числителя, такъ и для знаменателя данной дроби; по сокращеніи на него получимъ.

$$\frac{4d(a + 3b)}{3c}$$

§ 84. Приведеніе дробей къ одному знаменателю. — *Дроби приводятъ къ одному знаменателю посредствомъ умноженія числителя и знаменателя каждой изъ нихъ на произведеніе знаменателей всѣхъ остальныхъ.* Такъ, напримѣръ, дроби:

$$\frac{a}{b},\quad \frac{c}{d},\quad \frac{e}{f},\quad \frac{g}{h}$$

послѣ такого преобразованія примутъ видъ:

$$\frac{adfh}{bdfh},\quad \frac{cbfh}{bdfh},\quad \frac{ebdh}{bdfh},\quad \frac{gbdf}{bdfh}$$

но не измѣнятъ своего значенія (§ 82). Общимъ знаменателемъ будетъ произведеніе всѣхъ первоначальныхъ знаменателей.

Иногда удается составить общій знаменатель болѣе простой, чѣмъ это произведеніе: для этого достаточно, какъ и въ ариѳметикѣ, найти выраженіе, *дѣлящееся* на каждаго изъ данныхъ знаменателей. Въ томъ случаѣ, когда эти послѣдніе — одночлены,

это *общее кратное* равно произведенію общаго наименьшаго кратнаго коэффиціентовъ на всѣ буквенные множители, входящіе въ знаменатели, въ ихъ наивысшихъ степеняхъ.

Пусть, напримѣръ, даны дроби:

$$\frac{A}{12a^3b^2c}, \quad \frac{B}{16a^2b^4}, \quad \frac{C}{18abc^3}$$

ихъ общее наименьшее кратное будетъ $144a^3b^4c^3$ Частныя отъ дѣленія этого одночлена на знаменателей соотвѣтственно будутъ: $12b^2c^2$, $9ac^3$, $8a^2b^3$. Послѣ приведенія къ одному знаменателю наши дроби, не измѣняя своего значенія, примутъ видъ:

$$\frac{A \times 12b^2c^2}{144a^3b^4c^3}, \quad \frac{B \times 9ac^3}{144a^3b^4c^3}, \quad \frac{C \times 8a^2b^3}{144a^3b^4c^3}$$

Если же знаменатели — многочлены, то разысканіе ихъ общаго кратнаго болѣе простого, чѣмъ произведеніе всѣхъ знаменателей, можетъ быть выполнено, вообще говоря, только при помощи высшей алгебры. Впрочемъ, въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ такое кратное составить можно.

Пусть, напримѣръ, даны дроби:

$$\frac{2a}{3b^3}, \quad \frac{a+b}{2b(a-b)}, \quad \frac{a-b}{4a(a+b)}, \quad \frac{a^2+2b^2}{9a^2(a^2-b^2)}.$$

Такъ какъ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, то, очевидно, такимъ кратнымъ будетъ выраженіе $36a^2b^3(a^2-b^2)$; частныя отъ дѣленія этого кратнаго на данныхъ знаменателей соотвѣтственно будутъ:

$$12a^2(a^2-b^2), \quad 18a^2b(a+b), \quad 9ab^2(a-b), \quad 4b^3$$

Данныя дроби послѣ преобразованія примутъ видъ

$$\frac{24a^3(a^2-b^2)}{36a^2b^3(a^2-b^2)}, \quad \frac{18a^2b(a+b)^2}{36a^2b^3(a^2-b^2)}, \quad \frac{9ab^2(a-b)^2}{36a^2b^3(a^2-b^2)}, \quad \frac{4b^3(a^2+2b^2)}{36a^2b^3(a^2-b^2)}$$

II. Дѣйствія надъ алгебраическими дробями

§ 85. Сложеніе. — *Если дроби — съ одинаковыми знаменателями, то складываютъ ихъ числителей и подъ суммою подписываютъ ихъ общаго знаменателя.*

Такъ, напримѣръ,

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m}+\frac{d}{m}=\frac{a+b+c+d}{m},$$

потому что, умноживъ обѣ части этого равенства на m, мы получимъ одно и то же выраженіе $(a+b+c+d)$ (**§ 30**).

Если дроби — съ различными знаменателями, то ихъ сначала приводятъ къ одному и тому же знаменателю и потомъ поступаютъ по предыдущему.

§ 86. Вычитаніе. — *Если дроби — съ одинаковыми знаменателями, то вычитаютъ числитель второй дроби изъ числителя первой и подъ этою разностью подписываютъ ихъ общаго знаменателя.*

Такъ, напримѣръ,

$$\frac{a}{m}-\frac{b}{m}=\frac{a-b}{m},$$

потому что, умноживъ обѣ части этого равенства на m, мы получимъ одно и то же выраженіе $(a-b)$ (**§ 30**).

Если дроби — съ различными знаменателями, то ихъ приводятъ сначала къ одному и тому же знаменателю и потомъ поступаютъ по предыдущему.

§ 87. Умноженіе. — *Чтобы умножить одну дробь на другую, перемножаютъ между собою отдѣльно числителей, и отдѣльно знаменателей, и первое произведеніе дѣлятъ на второе.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется умножить дробь $\frac{a}{b}$ на дробь $\frac{a}{b}$. Обозначимъ черезъ q и q' значенія этихъ драбей и тогда изъ опредѣленія дроби выводимъ:

$$a=bq,\quad a'=b'q.$$

Перемножая эти равенства по-членно [1], получаемъ:

$$aa'=bq\,.\,b'q',\quad \text{или}\quad (\S\ 28)\ aa'=bb'qq'.$$

[1]) т.-е. первую часть перваго равенства на первую часть 2-го и 2-ую часть перваго на 2-ую часть 2-го.

Дѣля обѣ части послѣдняго равенства на bb', мы будемъ имѣть:

$$\frac{aa'}{bb'} = qq', \quad \text{или} \quad \frac{aa'}{bb'} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'},$$

что и требовалось доказать.

Изъ этого правила вытекаетъ, что *произведеніе нѣсколькихъ дробей равно дроби, происходящей отъ дѣленія произведенія числителей на произведеніе знаменателей*

Такъ, напримѣръ,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} \cdot \frac{a''}{b''} \ldots = \frac{aa'a''\ldots}{bb'b''\ldots},$$

а отсюда, какъ слѣдствіе:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

§ 88. Дѣленіе. — *Чтобы раздѣлить одну дробь на другую, умножаютъ дробь-дѣлимое на обращенную дробь-дѣлитель.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть требуется раздѣлить $\frac{a}{b}$ на $\frac{a'}{b'}$. Называя значенія этихъ дробей черезъ q и q', можемъ написать такія равенства:

$$a = bq, \quad a' = b'q'.$$

Раздѣливъ по-членно эти равенства другъ на друга, получимъ:

$$\frac{a}{a'} = \frac{bq}{b'q'}.$$

Умножаемъ теперь обѣ части послѣдняго равенства на $\frac{b'}{b}$ (§ 87):

$$\frac{ab'}{a'b} = \frac{bqb'}{b'q'b}.$$

Упрощаемъ вторую часть этого равенства (§ 83):

$$\frac{ab'}{a'b} = \frac{q}{q'},$$

а это равносильно слѣдующему равенству:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b'}{a'} = \frac{a}{b} : \frac{a'}{b'},$$

что и требовалось доказать.

III. Отрицательные показатели

§ 89. Опредѣленіе. — Мы видѣли (§ 54), что частное отъ дѣленія a^m на a^n есть a^{m-n}, но при выводѣ этого правила предполагалось, что $m > n$. Если же, наоборотъ, $m < n$, то частное должно быть представлено подъ видомъ дроби $\frac{a^m}{a^n}$. Въ этомъ случаѣ дробь можно сократить на m общихъ множителей, изъ которыхъ каждый равенъ a, и дробь послѣ этого приметъ видъ $\frac{1}{a^{n-m}}$.

Съ другой стороны, прилагая правило показателей и къ тому случаю, когда показатель дѣлителя больше показателя дѣлимаго, мы должны были-бы написать:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Поэтому, для сохраненія за правиломъ показателей всей его общности *согласимся подъ выраженіемъ a^{-p} понимать дробь вида* $\frac{1}{a^p}$.

Такимъ образомъ мы вводимъ, какъ опредѣленіе, что *буква съ отрицательнымъ показателемъ выражаетъ дробь, у которой числитель единица, а знаменатель — та же самая буква и съ тѣмъ же показателемъ, но взятымъ положительно.* Мы сейчасъ увидимъ, что это обозначеніе позволитъ намъ обобщить нѣкоторыя теоремы.

Замѣтимъ сначала, что формула

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}, \qquad (1)$$

справедливая, по опредѣленію, въ томъ случаѣ, когда m положительно, будетъ справедлива по тому же самому опредѣленію и тогда когда m — отрицательно. Въ самомъ дѣлѣ, если положить $m = -m'$, то $-m$ будетъ равно m'; а въ такомъ случаѣ обѣ части формулы (1) соотвѣтственно будутъ: $a^{m'}$ и $\frac{1}{a^{-m'}}$. По опредѣленію, $a^{-m'} = \frac{1}{a^{m'}}$, потому что m' — положительно; слѣдовательно, $\frac{1}{a^{-m'}}$ есть частное отъ дѣленія 1 на $\frac{1}{a^{m'}}$, или $a^{m'}$ (§ 88). Обѣ части являются равными.

§ 90. Обобщеніе правила показателей при умноженіи. — Мы доказали формулу

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (2)$$

при положительныхъ показателяхъ (§ 28). Она остается справедливою и въ томъ случаѣ, если одинъ или даже оба показателя будутъ отрицательными.

Предположимъ сначала, что m — положительно, а n — отрицательно и равно $-n'$. Тогда мы будемъ имѣть:

$$a^m a^n = a^m \cdot a^{-n'} = a^m \cdot \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^m}{a^{n'}}.$$

А такъ какъ $\frac{a^m}{a^{n'}} = a^{m-n'}$ по общему правилу дѣленія (§ 89), то

$$a^m \cdot a^n = a^{m-n'},$$

или, по замѣнѣ n' на $-n$, получимъ:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Предположимъ теперь, что какъ m, такъ и n — отрицательны и равны $-m'$ и $-n'$. Тогда мы будемъ имѣть:

$$a^m \cdot a^n = a^{-m'} \cdot a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \cdot \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-m'-n'} = a^{m+n},$$

что и требовалось доказать.

§ 91. Обобщеніе правила показателей при дѣленіи. — Формула

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (3)$$

справедлива при положительныхъ показателяхъ (§ 89). Она остается справедливою и въ томъ случаѣ, если одинъ, m или n, или даже оба показателя будутъ отрицательными.

Предположимъ сначала, что $m = -m'$, а n — положительно. Тогда мы будемъ имѣть:

$$a^m : a^n = a^{-m'} : a^n = \frac{1}{a^{m'}} : a^n = \frac{1}{a^{m'+n}} = a^{-m'-n} = a^{m-n}.$$

Если же, наоборотъ, m — положительно, а n — отрицательно и равно $-n'$, то мы будемъ имѣть:

$$a^m : a^n = a^m : a^{-n'} = a^m : \frac{1}{a^{n'}} = a^m \cdot a^{n'} = a^{m+n'} = a^{m-n}.$$

Наконецъ, пусть будутъ заразъ $m = -m'$ и $n = -n'$. Тогда мы получимъ:

$$a^m : a^n = a^{-m'} : a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} : \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^{n'}}{a^{m'}} = a^{n'-m'} = a^{m-n}.$$

Итакъ, формула (3) оказалась справедливою во всѣхъ случаяхъ.

§ 92. Обобщеніе правила показателей при возвышеніи степени въ новую степень. — Мы доказали формулу

$$(a^m)^n = a^{mn} \tag{4}$$

для случая, когда m и n положительны (**§ 29**). Она остается справедливою и въ томъ случаѣ, когда m, или n, или оба вмѣстѣ отрицательны.

Предположимъ сначала, что m — положительно, а n — отрицательно и равно $-n'$. Тогда мы будемъ имѣть:

$$(a^m)^n = (a^m)^{-n'} = \frac{1}{(a^m)^{n'}} = \frac{1}{a^{mn'}} = a^{-mn'} = a^{m(-n')} = a^{mn}.$$

Предположимъ теперь, что $m = -m'$, а n — положительно. Тогда мы получимъ:

$$(a^m)^n = a^{(-m')n} = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^n = \frac{1}{a^{m'n}} = a^{-m'n} = a^{-m'n} = a^{mn}.$$

Наконецъ, пусть будутъ заразъ $m = -m'$ и $n = -n'$. Тогда мы будемъ имѣть:

$$(a^m)^n = (a^{-m'})^{-n'} = \left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{-n'} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'}}\right)^{n'}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^{m'n'}}\right)} = a^{m'n'} = a^{mn}.$$

Итакъ, правило оказалось общимъ.

IV. Теоремы и приложенія

§ 93. Теорема. — *Если дано нѣсколько равныхъ между собою дробей $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, ..., то можно составить новую дробь, равную каждой изъ данныхъ, раздѣливъ сумму числителей на сумму знаменателей.*

Въ самомъ дѣлѣ, обозначая черезъ q значеніе каждой изъ данныхъ дробей, мы будемъ имѣть, по опредѣленію,

$$a = bq, \quad a' = b'q, \quad a'' = b''q, \ldots ;$$

сложивъ эти равенства по-членно и вынесши q во второй части за скобки, напишемъ:

$$a + a' + a'' + \ldots = (b + b' + b'' + \ldots)q.$$

Дѣля, наконецъ, обѣ части на $(b + b' + b'' + \ldots)$, получаемъ:

$$\frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots} = q = \frac{a}{b}. \qquad (5)$$

что и требовалось доказать.

Слѣдствія: 1) *Предварительно, до составленія такой новой дроби, можно умножить числителя и знаменателя каждой изъ данныхъ дробей на произвольное число.*

Такимъ образомъ

$$\frac{a}{b} = \frac{a\lambda}{b\lambda}, \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a'\lambda'}{b'\lambda'}, \quad \frac{a''}{b''} = \frac{a''\lambda''}{b''\lambda''}, \ldots$$

Такъ какъ данныя дроби послѣ такого преобразованія не измѣнили своего значенія, то по предыдущему мы можемъ написать:

$$\frac{a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \ldots}{b\lambda + b'\lambda' + b''\lambda'' + \ldots} = \frac{a\lambda}{b\lambda} = \frac{a}{b}. \qquad (6)$$

2) *Если дано нѣсколько равныхъ между собою дробей и притомъ положительныхъ, то можно составить новую дробь, равную каждой изъ данныхъ, раздѣливъ квадратный корень изъ суммы квадратовъ числителей на квадратный корень изъ суммы квадратовъ знаменателей.*

Въ самомъ дѣлѣ, по возведеніи каждой дроби въ квадратъ, мы можемъ написать:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \ldots = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}.$$

Извлекая же квадратный корень изъ отдѣльныхъ частей этихъ равенствъ, получаемъ:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \frac{\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}}{\sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}}. \qquad (7)$$

§ 94. Теорема. — *Если дано нѣсколько неравныхъ между собою дробей, съ положительными числителями и знаменателями, то, раз-*

дѣливъ сумму числителей на сумму знаменателей, получимъ новую дробь, заключающуюся между наибольшею и наименьшею изъ данныхъ дробей.

Пусть, напримѣръ, даны дроби:

$$\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''} < \frac{a'''}{b'''}.$$

Полагая $\frac{a}{b} = q$ и, слѣдовательно, $a = bq$, заключаемъ, что

$$a' > b'q, \quad a'' > b''q, \quad a''' > b'''q.$$

Складывая по-членно полученныя неравенства и равенство:

$$a = bq,$$

получаемъ:

$$a + a' + a'' + a''' > (b + b' + b'' + b''')q,$$

откуда выводимъ, что

$$\frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} > q,$$

или

$$\frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} > \frac{a}{b}. \qquad (8)$$

Полагая же $\frac{a'''}{b'''} = q$ и, слѣдовательно, $a''' = b'''q$, заключаемъ, что

$$a'' < b''q, \quad a' < b'q, \quad a < bq.$$

Складывая по-членно эти неравенства и равенство:

$$a''' = b'''q,$$

получаемъ:

$$a + a' + a'' + a''' < (b + b' + b'' + b''')q,$$

откуда выводимъ, что

$$\frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} < q,$$

или

$$\frac{a + a' + a'' + a'''}{b + b' + b'' + b'''} < \frac{a'''}{b'''}. \qquad (9)$$

Равенства (8) и (9) и доказываютъ нашу теорему.

Легко вывести изъ этой теоремы слѣдствія, аналогичныя слѣдствіямъ изъ теоремы § 93-го.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Доказать равенство

$$\frac{x^2y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(x^2-c^2)(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}=$$
$$=x^2+y^2+z^2-b^2-c^2$$

II. Доказать равенство

$$\frac{y^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)}+\frac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)}=1$$

III. Доказать равенство

$$\frac{x^2z^2}{b^2c^2}+\frac{(x^2-b^2)(b^2-z^2)y^2}{(y^2-b^2)b^2(c^2-b^2)}+\frac{(x^2-c^2)(c^2-z^2)y^2}{(c^2-y^2)c^2(c^2-b^2)}=\frac{(y^2-x^2)(y^2-z^2)}{(y^2-b^2)(y^2-c^2)}.$$

IV. Доказать равенство

$$\frac{1}{p^2q^2}=\frac{1}{(p+q)^2}\left[\frac{1}{p^2}+\frac{1}{q^2}\right]+\frac{2}{(p+q)^3}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right].$$

V. Доказать равенство

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)(x+b)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}=$$
$$=\frac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}.$$

Отв. Формулы I, II, III, IV, V можно доказать, приведя обѣ части къ одному знаменателю: тогда получатся тождества.

VI. Упростить выраженіе

$$\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}.$$

Отв. $\frac{1}{1-x^2}$.

VII. Упростить выраженіе

$$\frac{1}{1-\left[\frac{a+b+(1+ab)x}{1+ab+(a+b)x}\right]^2}\cdot\frac{(1+ab)[1+ab+(a+b)x]-(a+b)[a+b+(1+ab)x]}{[1+ab+(a+b)x]^2}$$

Отв. $\frac{1}{1-x^2}$.

VIII. Доказать пропорцію

$$\frac{\frac{c}{a+b} - \frac{c}{a+2b}}{\frac{c}{a+2b} - \frac{c}{a+3b}} = \frac{\frac{c}{a+b}}{\frac{c}{a+3b}}$$

IX. Упростить выраженіе

$$\frac{x^{3n}}{x^n-1} - \frac{x^{2n}}{x^n+1} - \frac{1}{x^n-1} + \frac{1}{x^n+1}$$

и показать, что оно представляетъ цѣлый многочленъ относительно x.

X. Упростить выраженіе

$$\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2) + \frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2) + \frac{a+c}{ac}(a^2+c^2-b^2).$$

и показать, что сумма не содержитъ знаменателей.

ГЛАВА ПЯТАЯ

Алгебраическіе радикалы

§ 95. Опредѣленія.—Мы видѣли (**§ 29**), что для возвышенія цѣлаго одночлена въ m-ую степень нужно возвысить его коэффиціентъ въ m-ую степень и умножить на m всѣхъ показателей. Отсюда слѣдуетъ, что если коэффиціентъ какого-нибудь одночлена представляетъ точную m-ую степень, а показатели—числа кратныя относительно m, то *для извлеченія корня m-ой степени изъ этого одночлена извлекаютъ корень m-ой степени изъ коэффиціента и дѣлятъ на m всѣхъ показателей.* Такъ, напр.,

$$\sqrt[m]{5^m a^{3m} b^{2m} c^m} = 5a^3b^2c.$$

Весьма часто случается, что нѣтъ такого раціональнаго одночлена, m-ая степень котораго равнялась бы данному одночлену; въ такомъ случаѣ корень m-ой степени только обозначаютъ при помощи знака: *число, m-ая степень котораго равна A, изображаютъ посредствомъ $\sqrt[m]{A}$.* Такое число называется *радикаломъ*, а m его *показателемъ*. Называютъ также радикаломъ и самый знакъ $\sqrt[m]{\ }$.

Если A представляетъ многочленъ, то корень m-ой степени изъ него почти никогда не можетъ быть выраженъ другимъ многочленомъ; правила для нахожденія корня въ видѣ многочлена, если только въ такомъ видѣ онъ можетъ быть представленъ, выводятся лишь во 2-ой части алгебры. Мы во всѣхъ случаяхъ корень m-ой степени изъ количества A будемъ обозначать черезъ $\sqrt[m]{A}$.

§ 96. Различныя значенія $\sqrt[m]{A}$. — Если ограничиться положительными числами, то $\sqrt[m]{A}$ по нашему опредѣленію будетъ имѣть только одно и притомъ вполнѣ опредѣленное значеніе. Но по соглашеніямъ, принятымъ въ алгебрѣ, придется $\sqrt[m]{A}$ дать болѣе широкое толкованіе. Намъ могутъ представиться четыре случая

1. Если A положительно и m четное, то корень m-ой степени изъ A имѣетъ два равныхъ, но противуположныхъ по знаку, значенія. Въ самомъ дѣлѣ, какой-бы знакъ ни стоялъ передъ $\sqrt[m]{A}$, это число, будучи возвышено въ m-ую степень, дастъ всегда A, такъ какъ произведеніе четнаго числа отрицательныхъ множителей всегда положительно (§ 40). Напр., $\sqrt{4}$ можетъ дать, по нашимъ соглашеніямъ, какъ число -2, такъ и число $+2$, потому что и то, и другое въ квадратѣ даетъ 4.

2. Если A — положительно и m — нечетное, то *пока* нельзя приписать $\sqrt[m]{A}$ другого значенія, болѣе общаго, чѣмъ ариѳметическое. Такъ, напр., $\sqrt[3]{8} = 2$.

3. Если A — отрицательно и m — четное, то $\sqrt[m]{A}$ не выражаетъ собою никакого числа: ни положительнаго, ни отрицательнаго. Дѣйствительно, четныя степени какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ чиселъ всегда положительны (§ 40).

4. Если A — отрицательно и m — нечетное, то положивъ $A = \quad A'$, будемъ имѣть:

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{-A'} = -\sqrt[m]{A'},$$

такъ какъ при m нечетномъ m-ая степень $-\sqrt[m]{A'}$ будетъ $-A'$ или, что все равно, A (§ 40). Такъ, напр., $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} =$ $= -2$, потому что кубъ -2 есть -8.

Эти обобщенія имѣютъ въ алгебрѣ большое значеніе; со временемъ мы разовьемъ ихъ еще болѣе, но въ этой главѣ останавливаться на нихъ не будемъ. *Здѣсь мы разсмотримъ только положительные корни изъ положительныхъ чиселъ.*

I. Преобразованіе радикаловъ

§ 97. Принципъ I. *Если радикалъ умноженъ на какой-нибудь множитель, то послѣдній можно подвести подъ знакъ радикала, предварительно возвысивъ его въ степень показателя корня.* Такъ, напр.,

$$a\sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a^m b}. \tag{1}$$

Въ самомъ дѣлѣ, возвышая въ m-ую степень какъ $a\sqrt[m]{b}$, такъ и $\sqrt[m]{a^m b}$, получаемъ одинаковые результаты, а именно, для перваго выраженія:

$$\left(a\sqrt[m]{b}\right)^m = a^m\left(\sqrt[m]{b}\right)^m = a^m b,$$

потому что m-ая степень произведенія равна произведенію m-ыхъ степеней множителей; для второго же выраженія по самому опредѣленію, имѣемъ:

$$\left(\sqrt[m]{a^m b}\right)^m = a^m b.$$

Изъ той же формулы (1) заключаемъ, что *можно множитель, находящійся подъ радикаломъ, вывести изъ подъ него: стоитъ только изъ этого множителя извлечь корень указанной степени.*

§ 98. Принципъ II. — *Значеніе радикала не измѣнится, если умножить показателя корня и показателя подкореннаго количества на одно и то же число.* Такъ, напр.,

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}. \tag{2}$$

Въ самомъ дѣлѣ, возвышая въ mp-ую степень какъ $\sqrt[m]{a^n}$, такъ и $\sqrt[mp]{a^{np}}$, получаемъ одинаковые результаты, а именно, для перваго выраженія:

$$\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^{mp} = \left[\left(\sqrt[m]{a^n}\right)^m\right]^p = (a^n)^p = a^{np}.$$

потому что mp-ая степень какого-нибудь выраженія есть p-ая степень m-ой степени того-же выраженія (§ 29); для второго же выраженія, по самому опредѣленію, имѣемъ:

$$\left(\sqrt[mp]{a^{np}}\right)^{mp} = a^{np}.$$

Изъ той же формулы (2) заключаемъ, что *можно раздѣлить какъ показателя корня, такъ и показателя подкоренного количества на одно и то же число, не измѣняя значенія радикала.*

§ 99. Упрощеніе радикала.—Если подъ корнемъ стоитъ количество, возвышенное въ нѣкоторую степень, то такой радикалъ часто можно упростить.

1. *Если показатель корня равенъ показателю степени, то оба дѣйствія взаимно уничтожаются.* Въ самомъ дѣлѣ, по § 95-му имѣемъ:

$$\sqrt[m]{a^m} = a.$$

2. *Если показатель корня и показатель степени имѣютъ общаго множителя, то на него обоихъ показателей можно сократить.* Въ самомъ дѣлѣ, по § 98-му имѣемъ:

$$\sqrt[mp]{a^{np}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

3. *Если подъ радикаломъ есть множитель съ показателемъ, кратнымъ относительно показателя корня, то его можно вывести изъ-подъ знака радикала, раздѣливъ его показателя на показателя корня.* Въ самомъ дѣлѣ, по § 97-му имѣемъ:

$$\sqrt[m]{a^{mp}b} = a^p\sqrt[m]{b}.$$

§ 100. Приведеніе радикаловъ къ одному показателю (корня).—Пусть будутъ даны два радикала: $\sqrt[m]{a^p}$, $\sqrt[n]{b^q}$; можно въ первомъ радикалѣ показатель корня и показатель степени умножить на показатель n второго радикала, а въ послѣднемъ показатель корня и показатель степени умножить на показатель m перваго радикала (§ 98); послѣ этого мы будемъ имѣть: $\sqrt[mn]{a^{pn}}$ и $\sqrt[mn]{b^{qm}}$. Теперь оба радикала—съ однимъ и тѣмъ же показателемъ, такъ какъ послѣдній есть произведеніе обоихъ показателей корня.

Итакъ, чтобы привести два радикала къ одному показателю (корня), умножаютъ показателей корня и степени въ каждомъ изъ нихъ на показателя корня въ другомъ.

Также, чтобы привести нѣсколько радикаловъ къ одному показателю (корня), умножаютъ показателей корня и степени въ каждомъ изъ нихъ на произведенiе показателей корня во всѣхъ остальныхъ. Такъ, напр., радикалы

$$\sqrt[m]{a^\alpha}, \quad \sqrt[n]{b^\beta}, \quad \sqrt[p]{c^\gamma}, \quad \sqrt[q]{d^\delta}$$

послѣ такого преобразованiя примутъ видъ:

$$\sqrt[mnpq]{a^{\alpha npq}}, \quad \sqrt[mnpq]{b^{\beta mpq}}, \quad \sqrt[mnpq]{c^{\gamma mnq}}, \quad \sqrt[mnpq]{d^{\delta mnp}}.$$

Эти правила имѣютъ большое сходство съ правилами приведенiя дробей къ одному знаменателю. Сходство это можно провести и далѣе, *приводя радикалы къ такому общему показателю корня, который равенъ общему наименьшему кратному всѣхъ показателей корня.* Въ самомъ дѣлѣ, пусть μ будетъ общимъ наименьшимъ кратнымъ показателей корня m, n, p, q; въ такомъ случаѣ мы можемъ написать:

$$\mu = mm', \quad \mu = nn', \quad \mu = pp', \quad \mu = qq'.$$

Умноживъ показателя корня и показателя степени въ каждомъ радикалѣ соотвѣтственно на m', n', p', q', получимъ

$$\sqrt[mm']{a^{\alpha m'}}, \quad \sqrt[nn']{b^{\beta n'}}, \quad \sqrt[pp']{c^{\gamma p'}}, \quad \sqrt[qq']{d^{\delta q'}}.$$

или, что все равно,

$$\sqrt[\mu]{a^{\alpha m'}}, \quad \sqrt[\mu]{b^{\beta n'}}, \quad \sqrt[\mu]{c^{\gamma p'}}, \quad \sqrt[\mu]{d^{\delta q'}}$$

II. Дѣйствiя надъ радикалами

101. Умноженiе.— *Чтобы перемножить нѣсколько радикаловъ съ однимъ и тѣмъ же показателемъ, достаточно перемножить ихъ подкоренныя количества и изъ произведенiя извлечь корень той же степени.* Такъ, напр.,

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} \cdot \sqrt[m]{c} \cdot \sqrt[m]{d} = \sqrt[m]{abcd}. \qquad (3)$$

Для доказательства возвысимъ обѣ части этой формулы въ m-ую степень. Такъ какъ m-ая степень произведенія равна произведенію m-ыхъ степеней множителей (§ 29), то, возведя первую часть формулы въ m-ую степень, будемъ имѣть:

$$\left(\sqrt[m]{a}\,.\sqrt[m]{b}\,.\sqrt[m]{c}\,.\sqrt[m]{d}\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m\left(\sqrt[m]{b}\right)^m\left(\sqrt[m]{c}\right)^m\left(\sqrt[m]{d}\right)^m = abcd.$$

Вторая же часть по возведеніи въ ту же степень даетъ, по опредѣленію, также $abcd$. Результаты получились одинаковые; слѣдовательно, формула (3) справедлива.

Чтобы перемножить нѣсколько радикаловъ съ различными показателями, приводятъ ихъ сначала къ одному показателю (§ 100) *и затѣмъ поступаютъ по предыдущему.* Такъ, напр.,

$$\sqrt[p]{a^2}\,.\sqrt[q]{a^3}\,.\sqrt[r]{a} = \sqrt[pqr]{a^{2qr}}\,.\sqrt[pqr]{a^{3pr}}\,.\sqrt[pqr]{a^{pq}} = \sqrt[pqr]{a^{2qr+3pr+pq}}\,.$$

Если радикалы имѣютъ коэффиціенты, численные или буквенные, то ихъ также перемножаютъ. Такъ, напр.,

$$3h\sqrt[p]{a^2}\,.\,4k\sqrt[q]{a} = 12hk\sqrt[pq]{a^{2q+p}}\,.$$

§ 102. Дѣленіе.—*Чтобы раздѣлить два радикала съ однимъ и тѣмъ же показателемъ одинъ на другой, достаточно раздѣлить одно на другое ихъ подкоренныя количества и изъ частнаго извлечь корень той же степени.* Такъ, напр.,

$$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}\,. \qquad (4)$$

Для доказательства возвысимъ обѣ части этой формулы въ m-ую степень. Такъ какъ m-ая степень дроби равна частному отъ дѣленія m-ой степени числителя на m-ую степень знаменателя (§ 87), то, возвышая въ m-ую степень первую часть формулы, получимъ:

$$\left(\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}\right)^m = \frac{\left(\sqrt[m]{a}\right)^m}{\left(\sqrt[m]{b}\right)^m} = \frac{a}{b}.$$

Вторая же часть по возведенiи въ ту же степень даетъ, по опредѣленiю, также $\frac{a}{b}$. Результаты одинаковые; слѣдовательно, формула (4) справедлива.

Чтобы раздѣлить два радикала съ различными показателями одинъ на другой, приводятъ ихъ сначала къ одному показателю и затѣмъ поступаютъ по предыдущему. Такъ, напр.,

$$\frac{\sqrt[p]{a^m}}{\sqrt[q]{b^n}} = \frac{\sqrt[pq]{a^{mq}}}{\sqrt[pq]{b^{np}}} = \sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{b^{np}}}.$$

Если радикалы имѣютъ коэффицiенты, то ихъ также дѣлятъ одинъ на другой. Такъ, напр.,

$$\frac{3h\sqrt[p]{a^m}}{4k\sqrt[q]{b^n}} = \frac{3h}{4k}\sqrt[pq]{\frac{a^{mq}}{b^{np}}}.$$

§ 103. Возвышенiе радикала въ степень. — *Чтобы возвысить какой-нибудь радикалъ въ степень, возвышаютъ въ эту степень подкоренное количество.* Такъ, напр.,

$$\left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^p = \sqrt[m]{a^{\alpha p}}. \qquad (5)$$

Для доказательства возвысимъ обѣ части этой формулы въ m-ую степень. Такъ какъ m-ая степень отъ p-ой степени какого-нибудь количества равна pm-ой, или mp-ой степени того же количества, и обратно, (**§ 29**), то возвышая въ m-ую степень первую часть формулы, получимъ:

$$\left[\left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^p\right]^m = \left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^{pm} = \left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^{mp} = \left[\left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^m\right]^p = (a^\alpha)^p = a^{\alpha p}.$$

Вторая же часть по возведенiи въ ту же степень даетъ, по опредѣленiю, также $a^{\alpha p}$. Результаты одинаковые; слѣдовательно, формула (5) справедлива.

Радикалъ послѣ возвышенiя въ степень упрощаютъ, если это возможно, по правиламъ **§ 99**-го.

Если радикалъ имѣетъ коэффицiентъ, то его также возвышаютъ въ ту же степень. Такъ, напр.,

$$\left(h\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^p = h^p\sqrt[m]{a^{\alpha p}}.$$

§ 104. Извлеченіе изъ радикала корня.— *Чтобы извлечь корень изъ какого-нибудь радикала, умножаютъ показателя корня даннаго радикала на показателя новаго корня* и затѣмъ упрощаютъ результатъ, если это возможно. Такъ, напр.,

$$\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^\alpha}} = \sqrt[mp]{a^\alpha}. \qquad (6)$$

Для доказательства возвысимъ обѣ части этой формулы въ mp-ую степень. Такъ какъ mp-ая степень какого-нибудь количества равна m-ой степени p-ой степени того же количества (**§ 29**), то при возвышеніи первой части формулы въ mp-ую степень будемъ имѣть:

$$\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^\alpha}}\right)^{mp} = \left[\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^\alpha}}\right)^p\right]^m = \left(\sqrt[m]{a^\alpha}\right)^m = a^\alpha.$$

Вторая же часть по возведеніи въ ту же степень даетъ, по опредѣленію, также a^α. Результаты—одинаковые; слѣдовательно, формула (6) справедлива.

III. Дробные показатели

§ 105. Опредѣленіе. Мы видѣли (**§ 95**), что для извлеченія корня p-ой степени изъ количества a^{mp}, показатель степени котораго есть кратное относительно показателя корня, достаточно показателя степени раздѣлить на показателя корня:

$$\sqrt[p]{a^{mp}} = a^m.$$

Но если показатель степени не удовлетворяетъ этому условію, то предыдущее правило не приложимо и тогда корень p-ой степени изъ a^m обозначаютъ черезъ $\sqrt[p]{a^m}$. Распространяя это правило и на послѣдній случай, мы должны были бы написать $a^{\frac{m}{p}}$. Поэтому, для сохраненія за этимъ правиломъ всей его общности необходимо ввести *соглашеніе*: представлять радикалъ $\sqrt[p]{a^m}$ посредствомъ символа $a^{\frac{m}{p}}$.

Мы примемъ, какъ опредѣленіе, *что буква a съ дробнымъ показателемъ $\frac{m}{p}$ представляетъ собою радикалъ, у котораго показатель*

корня есть знаменатель p, а показатель степени подкоренного количества—числитель m. Мы сейчасъ увидимъ, что такое обозначеніе дастъ намъ возможность проще изложить предыдущія теоремы.

Прежде чѣмъ выяснить преимущества такого обозначенія, замѣтимъ, что оно не можетъ привести ни къ какому противорѣчію и что выраженіе $a^{\frac{m}{p}}$ сохранитъ свое значеніе, если показатель $\frac{m}{p}$ замѣнить равной ему дробью $\frac{m'}{p'}$. Иначе говоря, если $\frac{m}{p} = \frac{m'}{p'}$, то

$$a^{\frac{m}{p}} = a^{\frac{m'}{p'}},$$

т. е., по только-что введенному опредѣленію

$$\sqrt[p]{a^m} = \sqrt[p']{a^{m'}}.$$

Но послѣднее равенство очевидно. Въ самомъ дѣлѣ, послѣ приведенія къ одному показателю корня оба радикала преобразуются соотвѣтственно въ $\sqrt[pp']{a^{mp'}}$ и $\sqrt[pp']{a^{m'p}}$, гдѣ подкоренныя количества также имѣютъ равныхъ показателей, потому что изъ равенства $\frac{m}{p} = \frac{m'}{p'}$ вытекаетъ равенство $mp' = m'p$.

§ 106. Обобщеніе правила показателей при умноженіи.—Мы доказали (**§ 28**) для цѣлыхъ и положительныхъ показателей формулу

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}. \qquad (1)$$

Эта формула остается справедливою и тогда, когда m, или n, или оба показателя заразъ дробныя числа.

Предположимъ сначала, что m — дробное и равно $\frac{p}{q}$, а n— цѣлое. По опредѣленію (**§ 105**) и I-му принципу (**§ 97**) будемъ имѣть:

$$a^m \cdot a^n = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^n = \sqrt[q]{a^p} \cdot a^n = \sqrt[q]{a^p \cdot a^{nq}} = \sqrt[q]{a^{p+nq}}.$$

Прилагая наше соглашеніе къ послѣднему выраженію, получимъ $a^{\frac{p+nq}{q}}$ или $a^{\frac{p}{q}+n}$; слѣдовательно,

$$a^{\frac{p}{q}} \cdot a^n = a^{\frac{p}{q}+n}.$$

Предположимъ теперь, что оба множителя съ дробными показателями, т.-е. что $m = \frac{p}{q}$ и $n = \frac{r}{t}$. Тогда мы будемъ имѣть:

$$a^m . a^n = a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{t}} = \sqrt[q]{a^p} . \sqrt[t]{a^r} = \sqrt[qt]{a^{pt}} . \sqrt[qt]{a^{rq}} = \sqrt[qt]{a^{pt} . a^{rq}} = \sqrt[qt]{a^{pt+rq}}.$$

Послѣднее выраженіе, по нашему соглашенію, можетъ принять видъ $a^{\frac{pt+rq}{qt}}$ или $a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{t}}$: слѣдовательно,

$$a^{\frac{p}{q}} . a^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{t}}.$$

§ 107. Обобщеніе правила показателей при дѣленіи.—При цѣлыхъ и положительныхъ показателяхъ m и n мы видѣли (§ 89):

$$a^m : a^n = a^{m-n}. \qquad (2)$$

Эта формула остается справедливою и тогда, когда m или n, или оба показателя заразъ—дробныя числа.

Предположимъ сначала, что $m = \frac{p}{q}$, а n — цѣлое. Тогда мы будемъ имѣть:

$$a^m : a^n = a^{\frac{p}{q}} : a^n = \sqrt[q]{a^p} : a^n = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[q]{a^{nq}} = \sqrt[q]{a^{p-nq}}.$$

Послѣдній радикалъ, по нашему соглашенію, можетъ принять видъ $a^{\frac{p-nq}{q}}$ или $a^{\frac{p}{q}-n}$: слѣдовательно,

$$a^{\frac{p}{q}} : a^n = a^{\frac{p}{q}-n}.$$

Предположимъ теперь, что m — цѣлое, а $n = \frac{p}{q}$. Въ этомъ случаѣ мы будемъ имѣть:

$$a^m : a^n = a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^m : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq}} : \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{mq-p}}.$$

Послѣдній радикалъ, по нашему соглашенію, можетъ принять видъ $a^{\frac{mq-p}{q}}$ или $a^{m-\frac{p}{q}}$; слѣдовательно,

$$a^m : a^{\frac{p}{q}} = a^{m-\frac{p}{q}}.$$

Предположимъ, наконецъ, что $m=\frac{p}{q}$ и $n=\frac{r}{t}$. Въ такомъ случаѣ мы можемъ написать:

$$a^m : a^n = a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{t}} = \sqrt[q]{a^p} : \sqrt[t]{a^r} = \sqrt[qt]{a^{pt}} : \sqrt[qt]{a^{rq}} = \sqrt[qt]{a^{pt-rq}}.$$

Послѣднее выраженіе, по нашему соглашенію, можетъ принять видъ $a^{\frac{pt-rq}{qt}}$ или $a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{t}}$; слѣдовательно,

$$a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{t}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{t}}.$$

§ 108. Обобщеніе правила показателей при возвышеніи степени въ новую степень.—Мы доказали (§ 29) для цѣлыхъ и положительныхъ значеній m и n формулу

$$(a^m)^n = a^{mn}. \tag{3}$$

Эта формула остается справедливою и въ томъ случаѣ, когда m, или n, или оба показателя заразъ—дробныя числа.

Предположимъ сначала, что $m=\frac{p}{q}$, а n — цѣлое. Тогда мы будемъ имѣть:

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^n = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^n = \sqrt[q]{a^{pn}};$$

и такъ какъ, по нашему соглашенію, $\sqrt[q]{a^{pn}} = a^{\frac{pn}{q}} = a^{\frac{p}{q}\cdot n}$, то отсюда заключаемъ, что

$$(a^m)^n = a^{\frac{p}{q}\cdot n} = a^{mn}.$$

Предположимъ теперь наоборотъ, т. е. что m — цѣлое, а $n=\frac{p}{q}$. Въ такомъ случаѣ будемъ имѣть:

$$(a^m)^n = (a^m)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^m)^p} = \sqrt[q]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{q}} = a^{m\cdot\frac{p}{q}} = a^{mn}.$$

Предположимъ, наконецъ, что $m=\frac{p}{q}$ и $n=\frac{r}{t}$. Въ этомъ случаѣ мы можемъ написать:

$$(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{t}} = \sqrt[t]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[tq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{tq}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{t}} = a^{mn}.$$

§ 109. Обобщеніе правила показателей при извлеченіи корня изъ степени.—Мы видѣли (§ 105), что при цѣлыхъ и положительныхъ значеніяхъ m и n существуетъ формула

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}; \tag{4}$$

она была доказана для случая, когда n дѣлится на m, и принята по соглашенію, когда n не дѣлится на m. Эта формула остается справедливою и тогда, когда m, или n, или оба числа заразъ—дробныя.

Предположимъ сначала, что m — цѣлое, а $n = \frac{p}{q}$. Тогда мы будемъ имѣть:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{\frac{p}{q}}} = \sqrt[m]{\sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[mq]{a^p};$$

а такъ какъ, по нашему соглашенію, послѣдній радикалъ можетъ быть написанъ въ видѣ $a^{\frac{p}{mq}}$ или $a^{\frac{p}{q}:m}$ то, слѣдовательно,

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{p}{q}:m} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Предположимъ, во-вторыхъ, что $m = \frac{p}{q}$, а n — цѣлое. Корень съ показателемъ $\frac{p}{q}$ изъ количества a^n есть такое число, $\frac{p}{q}$ - ая степень котораго равна a^n. Назовемъ это число черезъ x и тогда напишемъ:

$$x^{\frac{p}{q}} = a^n, \quad \text{или} \quad \sqrt[q]{x^p} = a^n.$$

Если обѣ части этого равенства возвысить въ q-ую степень, а потомъ изъ полученныхъ выраженій извлечь корень степени p, то будемъ имѣть послѣдовательно:

$$x^p = a^{nq}, \quad x = \sqrt[p]{a^{nq}} = a^{\frac{nq}{p}} = a^{n:\frac{p}{q}},$$

откуда заключаемъ, что

$$x = \sqrt[m]{a^n} = a^{n:\frac{p}{q}} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Предположимъ, наконецъ, что $m=\frac{p}{q}$ и $n=\frac{r}{t}$. Выраженіе

$$\sqrt[\frac{p}{q}]{a^{\frac{r}{t}}}$$

есть такое количество x, $\frac{p}{q}$-ая степень котораго равна $a^{\frac{r}{t}}$, и поэтому мы можемъ написать:

$$x^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{r}{t}},\quad \text{или}\quad \sqrt[q]{x^p}=\sqrt[t]{a^r}.$$

Возвышая обѣ части послѣдняго равенства въ q-ую степень и потомъ извлекая изъ полученныхъ выраженій корень p-ой степени, мы будемъ имѣть послѣдовательно:

$$x^p=\sqrt[t]{a^{rq}},\quad x=\sqrt[pt]{a^{rq}}=a^{\frac{rq}{pt}}=a^{\frac{r}{t}:\frac{p}{q}},$$

откуда выводимъ, что

$$x=\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{r}{t}:\frac{p}{q}}=a^{\frac{n}{m}}.$$

§ 110. Обобщеніе на случай, когда дробные показатели отрицательны. — До сихъ поръ мы предполагали, что числа m и n положительны. Различныя формулы, распространенныя на дробные показатели, останутся справедливыми и тогда, когда дробные показатели будутъ въ то же время и отрицательными: стоитъ только согласиться понимать подъ символомъ $a^{-\frac{p}{q}}$ выраженіе $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$ (§ 89), или что то же самое, выраженіе $\frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$ (§ 105).

Въ самомъ дѣлѣ, если при всевозможныхъ положительныхъ значеніяхъ m, цѣлыхъ или дробныхъ, справедлива формула

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m},$$

то и всѣ разсужденія, послужившія намъ въ предыдущей главѣ (§§ 89—92) для распространенія формулъ на тѣ случаи, когда показатели — цѣлыя отрицательныя числа, будутъ пригодны,

безъ всякихъ измѣненій, для распространенія тѣхъ же формулъ и на тѣ случаи, когда показатели не только отрицательныя, но въ то же время и дробныя числа.

Замѣтимъ, что формула (2) § 107-го справедлива и тогда, когда $m < n$, по послѣднему соглашенію.

Остается намъ сдѣлать только одно обобщеніе: на случай извлеченія корней. При всякихъ положительныхъ значеніяхъ m и n, цѣлыхъ или дробныхъ, мы имѣемъ формулу (§ 109)

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}. \qquad (4)$$

Эта формула остается справедливою и тогда, когда m, или n, или обѣ заразъ—отрицательныя числа.

Предположимъ сначала, что n—отрицательно и равно $-n'$, а m—положительно. Тогда имѣемъ:

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m]{a^{-n'}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^{n'}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^{n'}}} = \frac{1}{a^{\frac{n'}{m}}};$$

но такъ какъ, по нашему соглашенію, послѣднее выраженіе можетъ быть написано въ видѣ $a^{-\frac{n'}{m}}$, или $a^{-n':m}$, то отсюда заключаемъ, что

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{-n':m} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Предположимъ, во-вторыхъ, что m—отрицательно и равно $-m'$, а n—положительно. Выраженіе $\sqrt[-m']{a^n}$ есть такое количество x, $(-m')$-ая степень котораго равна a^n, и мы можемъ поэтому написать:

$$x^{-m'} = a^n, \text{ или } \frac{1}{x^{m'}} = a^n, \text{ или } x^{m'} = \frac{1}{a^n} = a^{-n}.$$

Отсюда выводимъ, что

$$x = \sqrt[m']{a^{-n}} = a^{\frac{-n}{m'}} = a^{n:-m'} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Предположимъ, наконецъ, что $m = -m'$ и $n = -n'$. Выраженіе $\sqrt[-m']{a^{-n'}}$ есть такое количество x, $(-m')$-ая степень котораго равна $a^{-n'}$. Такимъ образомъ мы имѣемъ:

$$x^{-m'} = a^{-n'}, \text{ или } \frac{1}{x^{m'}} = \frac{1}{a^{n'}}, \text{ откуда } x^{m'} = a^{n'}$$

Извлекая корень m'-ой степени изъ обѣихъ частей послѣдняго равенства, получимъ:

$$x = \sqrt[m']{a^{n}} = a^{\frac{n'}{m'}} = a^{\frac{-n}{m'}} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Теперь мы можемъ сказать, что всѣ наши формулы для умноженія, дѣленія, возвышенія въ степень и извлеченія корня—общія, т.-е. что онѣ справедливы для всевозможныхъ показателей какъ степеней, такъ и корней: положительныхъ или отрицательныхъ, цѣлыхъ или дробныхъ.

IV. Приложенія

§ 111. Какъ сдѣлать раціональнымъ знаменатель дроби. — Если знаменатель дроби содержитъ одинъ или нѣсколько радикаловъ, то часто бываетъ полезно освободиться отъ нихъ, т.-е. *сдѣлать* знаменатель *раціональнымъ*, особенно при приближенныхъ вычисленіяхъ. Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

1. Пусть будетъ дана дробь $\frac{m}{\sqrt{a}}$. Умножаемъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}$:

$$\frac{m}{\sqrt{a}} = \frac{m\sqrt{a}}{a}.$$

2. Пусть будетъ дана дробь $\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. Умножаемъ числителя и знаменателя на $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$: знаменатель явится разностью двухъ квадратовъ, и мы получимъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{m(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{a - b}.$$

3. Подобнымъ же образомъ

$$\frac{m}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{m(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}.$$

4. Также преобразуемъ:

$$\frac{m}{a - \sqrt{b}} = \frac{m(a + \sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

5. Пусть будетъ дана дробь $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Умножаемъ числителя и знаменателя на $\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ и, разсматривая $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, какъ одно количество, видимъ, что знаменатель явится въ такомъ случаѣ произведенiемъ суммы на разность, т.-е. мы получимъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-c}=$$

$$=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a+b-c-2\sqrt{ab}}.$$

Такимъ образомъ мы пришли къ 4-му случаю, когда знаменатель не содержитъ болѣе одного радикала.

6 Пусть будетъ дана дробь $\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c-\sqrt{d}}$. Разсматриваемъ знаменатель, какъ сумму двухъ членовъ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ и $(c-\sqrt{d})$, и умножаемъ числитель и знаменатель нашей дроби на разность этихъ членовъ:

$$\frac{m}{\sqrt{a}-\sqrt{b}+c-\sqrt{d}}=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}-c+\sqrt{d})}{a+b-2\sqrt{ab}-c^2-d+2c\sqrt{d}}=$$

$$=\frac{m(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{d}-c)}{(a+b-c^2-d)-2\sqrt{ab}+2c\sqrt{d}}.$$

Такимъ образомъ мы пришли къ 5-му случаю, когда знаменатель состоитъ всего изъ трехъ членовъ.

7. Пусть теперь будетъ дана дробь $\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$. Мы знаемъ, что

$$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\beta^3.$$

Умножаемъ поэтому числителя и знаменателя нашей дроби на $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$; имѣемъ:

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{m(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a+b}$$

8. Также имѣемъ:

$$\frac{m}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}=\frac{m(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})}{a-b}.$$

УПРАЖНЕНІЯ

I. Упростить выраженіе

$$\frac{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}-2}{n^3-3n+(n^2-1)\sqrt{n^2-4}+2}.$$

Отв. $\frac{(n+1)\sqrt{n-2}}{(n-1)\sqrt{n+2}}$.

II. Показать, что значеніе x, равное

$$[-q+(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}+[-q-(q^2+p^3)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}},$$

обращаетъ въ нуль выраженіе

$$x^3+3px+2q,$$

каковы бы ни были p и q.

III. Доказать равенство

$$\left[\frac{a+(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{a-(a^2-b)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=(a+b^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}.$$

Достаточно возвысить въ квадратъ обѣ части и получимъ тождество.

IV. Упростить выраженіе

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Отв. $4x\sqrt{x^2-1}$.

V. Упростить выраженіе

$$\frac{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}-2\sqrt[3]{x^3y}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{xy^3}-\sqrt[3]{x^3y}-\sqrt[3]{y^4}}.$$

Отв. $\frac{x-\sqrt[3]{x^2y}}{x+y}$.

VI. Упростить выраженіе

$$\sqrt{a^2+\sqrt[3]{a^4b^2}}+\sqrt{b^2+\sqrt[3]{a^2b^4}}$$

Отв. $(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$.

VII. Во что обратится выраженіе

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}$$

при $x=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$?

Отв. Въ 1.

VIII. Во что обратится выраженіе

$$2(uv-\sqrt{u^2-1}\sqrt{v^2-1})$$

при $2u=x+\frac{1}{x}$, $2v=y+\frac{1}{y}$?

Отв. Въ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$.

IX. Во что обратится, при томъ же предположеніи, выраженіе

$$2(uv+\sqrt{u^2-1}\sqrt{v^2-1})?$$

Отв. Въ $xy+\frac{1}{xy}$.

X. Во что обратится выраженіе

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$$

при $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$?

Отв. Въ $a+b$.

XI. Во что обратится выраженіе

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$$

при $x=\frac{2ab}{b^2+1}$?

Отв. Въ b.

КНИГА II

Уравненія первой степени

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Общіе принципы, относящіеся къ уравненіямъ, разсматриваемымъ отдѣльно

I. Опредѣленія

§ 112. Равенство.—Два количества, отдѣленныя другъ отъ друга знакомъ $=$, образуютъ *равенство*

§ 113. Тождество. — *Тождествомъ* называется равенство, образуемое двумя равными численными количествами или двумя формулами, получающими одинаковыя значенія *независимо отъ частныхъ значеній буквъ, входящихъ въ нихъ* Такъ, напр.,

$$5 = 5, \quad 8 = 7 + 1,$$

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

суть тождества.

§ 114. Уравненіе.—Особенно слѣдуетъ отмѣтить такое равенство, называемое *уравненіемъ, которое имѣетъ мѣсто только при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ него,* и которое, слѣдовательно, можетъ служить для опредѣленія этихъ значеній. Такъ, напр.,

$$3x + 13 = 15 - x$$

есть уравненіе: оно имѣетъ мѣсто только при одномъ частномъ значеніи $x = 7$.

Въ уравненіи различаютъ двѣ *части*: такъ называются выраженія, отдѣленныя другъ отъ друга знакомъ $=$. Часть, помѣщаемая съ лѣвой стороны этого знака, называется *первою*, а съ правой стороны—*второю*.

Буквы, частныя значенія которыхъ превращаютъ уравненіе въ тождество, называются *неизвѣстными* уравненія, а эти частныя значенія—*рѣшеніями* или *корнями* уравненія. Обыкновенно неизвѣстныя обозначаютъ послѣдними буквами алфавита: $x, y, z, \ldots$

Рѣшить уравненіе — это значитъ опредѣлить его корни. Говорятъ, что корни уравненія *удовлетворяютъ* ему, такъ какъ они обращаютъ его въ тождество.

Рѣшеніе уравненій составляетъ наиболѣе важную часть алгебры, а по мнѣнію нѣкоторыхъ это есть истинная ея цѣль.

§ 115. Равносильныя уравненія.—Говорятъ, что два уравненія съ одними и тѣми же неизвѣстными *равносильны, если они даютъ одни и тѣ же рѣшенія*. Всегда одно уравненіе можно замѣнить другимъ, равносильнымъ съ нимъ.

§ 116. Уравненія съ одною и съ несколькими неизвѣстными.—Уравненія различаютъ по числу неизвѣстныхъ, входящихъ въ нихъ; такимъ образомъ разсматриваютъ уравненія съ одною неизвѣстною x, уравненія съ двумя неизвѣстными x и y, уравненія съ тремя неизвѣстными: x, y и z, и т. д.

§ 117. Степень уравненія.—Если обѣ части уравненія представляютъ собою раціональныя выраженія и притомъ цѣлыя относительно неизвѣстныхъ, то *степенью уравненія будетъ сумма показателей неизвѣстныхъ въ томъ членѣ, гдѣ эта сумма наибольшая*.

Примѣры. 1) $3x + 7 = 8 - 2x$ есть уравненіе *первой* степени съ *одною* неизвѣстною x;

2) $4xy - 3x = 2 + 5y$ есть уравненіе *второй* степени съ *двумя* неизвѣстными x и y.

II. Принципы

§ 118. Теорема I.—*Можно прибавить по одному и тому же количеству къ обѣимъ частямъ уравненія, не измѣняя условій, которымъ подчинены неизвѣстныя*: другими словами, *послѣ такого прибавленія получается новое уравненіе, равносильное съ первымъ*.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть A и B будутъ части даннаго уравненія, т.-е.

$$A = B \qquad (1)$$

прибавляемъ къ обѣимъ частямъ по количеству m; пишемъ:

$$A + m = B + m. \qquad (2)$$

Всякое рѣшеніе уравненія (1) придаетъ A и B, по предположенію, равныя численныя значенія; слѣдовательно, если прибавить къ этимъ численнымъ значеніямъ соотвѣтственное численное значеніе количества m, то получатся равныя числа. Съ другой стороны, эти числа будутъ численными значеніями обѣихъ частей уравненія (2). Итакъ, всякое рѣшеніе уравненія (1) удовлетворяетъ уравненію (2).

Обратно, всякое рѣшеніе уравненія (2) придаетъ какъ $(A + m)$, такъ и $(B + m)$, равныя численныя значенія; слѣдовательно, если вычесть изъ послѣднихъ соотвѣтственное численное значеніе количества m, то остатки получатся равные. Съ другой стороны, эти остатки будутъ численными значеніями обѣихъ частей уравненія (1). Итакъ, всякое рѣшеніе уравненія (2) удовлетворяетъ уравненію (1).

Отсюда заключаемъ, что оба уравненія —равносильны.

§ 119. Замѣчаніе.—Доказанная теорема справедлива и тогда, когда m обозначаетъ какое-нибудь число, положительное или отрицательное. Поэтому никакого обобщенія не будетъ, если мы прибавимъ такую фразу: *можно, не измѣняя значенія уравненія* (т.-е. сохраняя всѣ его корни и не вводя новыхъ), *прибавить къ обѣимъ его частямъ или отнять отъ нихъ по одному и тому же числу.*

§ 120. Слѣдствіе I: перенесеніе членовъ.—*Можно всегда изъ одной части уравненія всякій ея членъ перенести въ другую съ перемѣною знака.*

Въ самомъ дѣлѣ, если m равно, но противоположно по знаку какому-нибудь члену уравненія, то, прибавляя къ обѣимъ частямъ послѣдняго по m, мы этимъ самымъ заставимъ вышеупомянутый членъ въ одной части уравненія исчезнуть, а въ другой его части появиться съ обратнымъ знакомъ.

Напр., прибавляя къ обѣимъ частямъ уравненія

$$2 + x = 5 - 3x$$

по $(-x)$, получимъ:

$$2 - 5 = 3x - x$$

Мы видимъ, что въ одной части членъ $(+x)$ исчезъ, а въ другой появился съ обратнымъ знакомъ.

§ 121. Слѣдствіе II. — *Можно измѣнить одновременно знаки у всѣхъ членовъ уравненія.*

Дѣйствительно, перенесемъ всѣ члены первой части во вторую, а всѣ члены второй въ первую. Пусть дано, напр., уравненіе

$$3 + x = 15 + 2x,$$

послѣ перенесенія членовъ оно приметъ видъ:

$$-2x - 15 = -x - 3,$$

а это одно и то же, что

$$x + 3 = 2x + 15$$

Мы видимъ, что всѣ члены заданнаго уравненія измѣнили свой знакъ.

§ 122. Теорема II. *Можно умножить обѣ части уравненія на одно и то же количество, не измѣняя условій, которымъ подчинены неизвѣстныя, лишь бы только численное значеніе множителя не являлось бы нулемъ. Послѣ такого умноженія получается новое уравненіе, равносильное съ первымъ.*

Для доказательства умножимъ обѣ части уравненія

$$A = B \qquad (1)$$

на m: будемъ имѣть

$$Am = Bm. \qquad (2)$$

Такъ какъ всякое рѣшеніе уравненія (1) придаетъ A и B равныя численныя значенія, то, умножая послѣднія на соотвѣтственное численное значеніе m, *которое, по предположенію, не равно нулю*, получимъ произведенія также равныя. Съ другой стороны, эти произведенія являются соотвѣтственными численными значеніями обѣихъ частей уравненія (2). Итакъ, всякое рѣшеніе уравненія (1) будетъ рѣшеніемъ и уравненія (2).

Обратно, всякое рѣшеніе уравненія (2) придаетъ равныя значенія какъ Am, такъ и Bm, поэтому, если эти значенія раздѣлить на соотвѣтственное значеніе m, *которое, по предположенію, не равно нулю*, то частныя получаются равныя; а такъ какъ эти частныя въ

то же время—численныя значенія обѣихъ частей уравненія (1), то всякое рѣшеніе уравненія (2) является рѣшеніемъ и уравненія (1).

Слѣдовательно, оба уравненія—равносильны.

§ 123. Изъ предыдущаго вытекаетъ, что обѣ части уравненія *можно также раздѣлить на какое-угодно число.* Въ самомъ дѣлѣ, раздѣлить на m—все равно, что умножить на $\frac{1}{m}$. Необходимо только, чтобы m, на которое мы дѣлимъ, ни въ какомъ случаѣ не обращалось въ нуль.

§ 124. Важное замѣчаніе.—Въ предыдущемъ принципѣ предположеніе, что множитель m—отличенъ отъ нуля, весьма существенно: уравненія (1) и (2) равносильны только при этомъ условіи. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (2) послѣ перенесенія всѣхъ членовъ изъ второй части въ первую можетъ быть представлено въ видѣ:

$$(A - B)m = 0, \qquad (2)$$

а въ такомъ случаѣ мы можемъ сказать, что всякое рѣшеніе уравненія (1), дѣлая A равнымъ B или, что все равно, обращая $A—B$ въ 0, все еще удовлетворяетъ уравненію (2), но обратное заключеніе, если m можетъ стать нулемъ, не будетъ справедливо, такъ какъ въ этомъ случаѣ уравненіе (2) удовлетворится и тогда, когда A не равно B.

Примѣръ.—Пусть будетъ дано уравненіе

$$3 - x = 15 - 2x \qquad (1)$$

Умножаемъ обѣ его части на $(x - 1)$; получаемъ новое уравненіе

$$(3 - x)(x - 1) = (15 - 2x)(x - 1) \qquad (2)$$

Рѣшеніе уравненія (1) $x = 12$ удовлетворяетъ, очевидно, и (2). Но значеніе $x = 1$, обращающее множитель $(x - 1)$ въ нуль, удовлетворяя уравненію (2)—оно обращаетъ въ нуль и первую, и вторую его часть—не удовлетворяетъ уравненію (1).

Такимъ образомъ, *умножая обѣ части уравненія на множитель, содержащій неизвѣстныя, мы можемъ ввести* **постороннія** *рѣшенія. Эти послѣднія будутъ рѣшеніями уравненія, которое мы получимъ, приравнявъ множитель нулю,* **какъ это и видно на предыдущемъ примѣрѣ. Слѣдовательно, если придется умножить обѣ части уравненія на подобный множитель, то послѣ рѣшенія вновь полученнаго**

уравненія необходимо будетъ испытать найденные корни и отбросить, какъ посторонніе, тѣ изъ нихъ, которые обращаютъ множитель въ нуль, но не удовлетворяютъ заданному уравненію.

Отсюда вытекаетъ, что, *дѣля обѣ части уравненія на выраженіе, содержащее неизвѣстныя, мы можемъ потерять одно или нѣсколько рѣшеній. Эти послѣднія будутъ рѣшеніями уравненія, которое мы получимъ, приравнявъ дѣлитель нулю.* Слѣдовательно, если придется раздѣлить обѣ части уравненія на подобное выраженіе, то необходимо будетъ рѣшить не только вновь полученное уравненіе но также и вспомогательное, которое получится, если приравнять нулю дѣлитель,—и изъ рѣшеній послѣдняго уравненія выбрать тѣ, которыя дѣйствительно были потеряны.

Если множитель или дѣлитель m есть нѣкоторое буквенное выраженіе, не содержащее неизвѣстныхъ, то вновь полученное уравненіе будетъ равносильно съ заданнымъ; при рѣшеніи послѣдняго слѣдуетъ, однако, избѣгать предположеній, обращающихъ m въ 0.

§ 125. Слѣдствіе: уничтоженіе знаменателей.—*Уравненіе съ дробными членами приводятъ къ цѣлому виду, умножая всѣ его члены или на произведеніе всѣхъ знаменателей, или на общее наименьшее кратное послѣднихъ:* вновь полученное уравненіе, вообще говоря, будетъ равносильно съ заданнымъ. Это правило есть очевидное слѣдствіе изъ теоремы II и теоріи дробей.

Примѣръ I.—Пусть будетъ дано уравненіе

$$2 = \frac{1}{x} + x - 1 + \frac{3}{x+1}; \qquad (1)$$

умноживъ обѣ его части на произведеніе $x(x+1)$, получимъ

$$2x(x+1) = x + 1 + (x-1)x(x+1) + 3x,$$

или

$$2x^2 + 2x = x + 1 + x^3 - x + 3x. \qquad (2)$$

Слѣдуетъ, однако, замѣтить, что множитель $x(x+1)$, будучи приравненъ нулю, даетъ рѣшенія $x=0$, $x=-1$. Это всѣ тѣ рѣшенія, которыя мы могли ввести посредствомъ умноженія. Но ни тотъ, ни другой не удовлетворяютъ уравненію (2); слѣдовательно, уравненія (1) и (2) равносильны.

Примѣръ II.—Пусть будетъ дано уравненіе

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x^2-a^2}. \qquad (1)$$

Очевидно, что обѣ части этого уравненія достаточно умножить на $(x^2 - a^2)$, такъ какъ этотъ знаменатель дѣлится на остальные два $(x - a)$ и $(x + a)$. Тогда мы получимъ:

$$x + a + x - a = 1 \qquad (2)$$

Такъ какъ уравненіе $x^2 - a^2 = 0$ имѣетъ только два корня: $x = +a$ и $x = -a$, изъ которыхъ ни одинъ не удовлетворяетъ уравненію (2), то уравненія (1) и (2) поэтому равносильны.

Примѣръ III. — Пусть будетъ дано еще уравненіе

$$1 - \frac{x^2}{x - 1} = \frac{1}{1 - x} - 6; \qquad (1)$$

послѣ умноженія обѣихъ частей этого уравненія на $(x - 1)$ получимъ:

$$x - 1 - x^2 = -1 - 6x + 6. \qquad (2)$$

Это послѣднее уравненіе имѣетъ рѣшенія 6 и 1, изъ которыхъ только одно, именно 6, удовлетворяетъ уравненію (1); поэтому, значеніе $x = 1$, обращающее множитель $(x - 1)$ въ нуль, должно быть отброшено.

§ 126. Теорема III.—*При возвышеніи обѣихъ частей уравненія въ одну и ту же степень вводятся, вообще говоря, постороннія рѣшенія.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дано уравненіе

$$A = B. \qquad (1)$$

Возвысимъ обѣ его части въ квадратъ:

$$A^2 = B^2. \qquad (2)$$

Очевидно, что всякое рѣшеніе уравненія (1) будетъ рѣшеніемъ и (2). А такъ какъ это послѣднее можетъ быть представлено въ видѣ:

$$A^2 - B^2 = 0, \text{ или } (A + B)(A - B) = 0,$$

то оно заключаетъ въ себѣ рѣшенія двухъ уравненій:

$$A - B = 0 \quad A + B = 0$$

Слѣдовательно, оно является болѣе общимъ, чѣмъ (1).

Точно также выводимъ, что уравненіе

$$A^m = B^m,$$

будучи представлено въ видѣ:

$$A^m - B^m = 0, \text{ или } (A - B)(A^{m-1} + BA^{m-2} + B^2A^{m-3} + \dots + B^{m-1}) = 0,$$

заключаетъ въ себѣ сверхъ рѣшеній уравненія (1), обращающихъ первый множитель нашего уравненія въ нуль, еще рѣшенія уравненія

$$A^{m-1} + BA^{m-2} + B^2A^{m-3} + \ldots + B^{m-1} = 0,$$

обращающія второй его множитель въ нуль.

Поэтому, если придется для рѣшенія даннаго уравненія возвысить обѣ его части въ одну и ту же степень, то послѣ рѣшенія вновь полученнаго уравненія слѣдуетъ испытать корни послѣдняго и отбросить, какъ посторонніе, тѣ изъ нихъ, которые не удовлетворяютъ заданному уравненію.

Напр., пусть будетъ дано уравненіе

$$\sqrt{9-x} = x - 9. \qquad (1)$$

Для рѣшенія возвышаемъ обѣ его части въ квадратъ:

$$9 - x = x^2 - 18x + 81 \qquad (2)$$

Послѣднее уравненіе можно рѣшить по извѣстному правилу, что мы изложимъ впослѣдствіи; получимъ корни $x = 9$ и $x = 8$. Изъ нихъ $x = 9$ удовлетворяетъ данному уравненію, а $x = 8$ не удовлетворяетъ и должно быть отброшено.

Послѣдній результатъ можно тѣмъ объяснить, что уравненіе (2)—квадратъ не только уравненія (1), но также и слѣдующаго уравненія

$$-\sqrt{9-x} = x - 9,$$

которое удовлетворяется при $x = 8$.

ГЛАВА ВТОРАЯ

Рѣшеніе уравненія первой степени съ одною неизвѣстною

I. Правило для рѣшенія уравненія

§ 127. Примѣры.—Принципы, изложенные въ предыдущей главѣ, достаточны для рѣшенія уравненія первой степени съ одною неизвѣстною. Покажемъ это на нѣсколькихъ примѣрахъ.

Примѣръ I.—Пусть будетъ дано уравненіе

$$3x - \frac{4}{3} - \frac{x}{4} = \frac{5x}{21} + 2x + 13. \qquad (1)$$

Уничтожаемъ сначала знаменателей, умножая на ихъ общее наименьшее кратное—въ данномъ случаѣ на 84—обѣ части уравненія (§ 125); получаемъ уравненіе

$$252x - 112 - 21x = 20x + 168x + 1092, \qquad (2)$$

равносильное съ заданнымъ, такъ какъ множитель въ этомъ случаѣ численный (§ 122).

Далѣе, всѣ члены, содержащіе неизвѣстное, переносимъ въ одну часть, остальные въ другую (§ 120), и такимъ образомъ получаемъ

$$252x - 21x - 20x - 168x = 1092 + 112,$$

или, послѣ приведенія подобныхъ членовъ въ каждой части уравненія,

$$43x = 1204. \qquad (3)$$

Послѣднее уравненіе равносильно съ уравненіемъ (2) на основаніи принципа, изложеннаго въ § 118-мъ.

Наконецъ, дѣлимъ обѣ части уравненія (3) на 43 и получаемъ равносильное съ нимъ (§ 123)

$$x = 28. \qquad (4)$$

Это же послѣднее уравненіе удовлетворяется значеніемъ x, равнымъ 28, и другого рѣшенія не имѣетъ. Слѣдовательно, и уравненіе (1) имѣетъ корень 28, другихъ же корней также не имѣетъ.

Чтобы убѣдиться въ томъ, что уравненіе (1) имѣетъ корень 28, стоитъ только въ немъ вмѣсто x подставить 28, и первая, и вторая его часть обратится въ $75\frac{2}{3}$.

Примѣръ II.—Коэффиціенты могутъ быть алгебраическіе. Пусть, напр., будетъ дано уравненіе

$$\frac{(2a+b)b^2}{a(a+b)^2}x + \frac{a^2b^2}{(a+b)^3} = 3cx + \frac{b}{a}x - \frac{3abc}{a+b}. \qquad (1)$$

Умножаемъ всѣ его члены на $a(a+b)^3$, т. е. на общее наименьшее кратное всѣхъ знаменателей; получаемъ новое уравненіе

$$(2a+b)b^2(a+b)x + a^3b^2 = 3ac(a+b)^3x + b(a+b)^3x - 3a^2bc(a+b)^2; \qquad (2)$$

полученное уравненіе будетъ равносильно съ первымъ, если при дальнѣйшихъ разсужденіяхъ не предполагать, что $a = 0$ или $b = -a$; при этихъ значеніяхъ нашъ множитель обращается въ нуль (§ 124).

Переносимъ всѣ неизвѣстные члены въ одну часть уравненія, а извѣстные—въ другую:

$$a^2b^2 + 3a^2bc(a+b)^2 = 3ac(a+b)^3x + b(a+b)^3x - (2a+b)b^2(a+b)x; \quad (3)$$

это уравненіе равносильно съ уравненіемъ (2). Вынося во второй части x за скобки, получаемъ:

$$a^2b^2 + 3a^2bc(a+b)^2 = [3ac(a+b)^3 + b(a+b)^3 - (2a+b)b^2(a+b)]x;$$

дѣлимъ обѣ части на коэффиціентъ при x

$$x = \frac{a^2b^2 + 3a^2bc(a+b)^2}{3ac(a+b)^3 + b(a+b)^3 - (2a+b)b^2(a+b)}; \quad (4)$$

послѣднее уравненіе будетъ также равносильно съ предыдущими, если не дѣлать такихъ предположеній, при которыхъ знаменатель послѣдней дроби обращался бы въ нуль.

Замѣчаемъ, что числитель этой дроби равенъ $a^2b[ab + 3c(a+b)^2]$; два же послѣднихъ члена въ знаменателѣ могутъ быть преобразованы такъ

$$b(a+b)[(a+b)^2 - b(2a+b)],$$

или, послѣ упрощенія,

$$b(a+b)a^2.$$

Слѣдовательно, весь знаменатель будетъ

$$3ac(a+b)^3 + a^2b(a+b),$$

или, послѣ вынесенія $a(a+b)$ за скобки,

$$a(a+b)[ab + 3c(a+b)^2]$$

Послѣ этого значеніе x можетъ быть представлено въ такомъ видѣ,

$$x = \frac{a^2b[ab + 3c(a+b)^2]}{a(a+b)[ab + 3c(a+b)^2]}, \quad (5)$$

или, по сокращеніи числителя и знаменателя на общихъ множителей,

$$x = \frac{ab}{a+b}. \quad (6)$$

Такъ какъ знаменатель въ формулѣ (5) обращается въ нуль при $a=0$, при $b=-a$ и при $c = -\frac{ab}{3(a+b)^2}$, то слѣдуетъ избѣгать въ приложеніяхъ этихъ трехъ предположеній.

Не трудно провѣрить, что найденное рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію (1).

§ 128. Общее правило. — Изъ предыдущихъ разсужденій можно вывести слѣдующее правило: *для рѣшенія уравненія первой степени съ одною неизвѣстною:* 1) *уничтожаютъ знаменателей;* 2) *переносятъ въ одну часть всѣ члены, содержащіе неизвѣстную, и въ другую— всѣ остальные;* 3) *въ каждой части дѣлаютъ приведеніе подобныхъ членовъ;* 4) *дѣлятъ членъ, свободный отъ неизвѣстной, на коэффиціентъ при этой неизвѣстной.* Частное будетъ значеніемъ неизвѣстной при тѣхъ ограниченіяхъ, о которыхъ мы говорили. Найденное значеніе повѣряютъ, вставляя его въ данное уравненіе, которое при этомъ должно обратиться въ тождество.

II. Уравненія, приводимыя къ первой степени

Уравненіе не первой степени иногда можетъ быть приведено къ таковому при помощи нѣкоторыхъ преобразованій. Покажемъ это на нѣсколькихъ примѣрахъ.

§ 129. Уравненіе — ирраціональное.

Примѣръ I.—Пусть будетъ дано уравненіе *)

$$\sqrt{4+x}=4-\sqrt{x} \qquad (1)$$

Возвышаемъ обѣ его части въ квадратъ:

$$4+x=16-8\sqrt{x}+x. \qquad (2)$$

Переносимъ неизвѣстные члены въ лѣвую часть, а извѣстные—въ правую и дѣлаемъ приведеніе:

$$8\sqrt{x}=12, \text{ или } 2\sqrt{x}=3 \qquad (3)$$

Возвышая еще разъ обѣ части въ квадратъ, получаемъ:

$$(4) \qquad 4x=9, \text{ откуда } x=\frac{9}{4} \qquad (5)$$

Такъ какъ всякое рѣшеніе уравненія (1) будетъ рѣшеніемъ и всѣхъ слѣдующихъ, которыя суть не что иное, какъ слѣдствія уравненія (1), и такъ какъ уравненіе (5) не имѣетъ другого рѣшенія, кромѣ $x=\frac{9}{4}$, то отсюда ясно, что уравненіе (1) другого рѣшенія также дать не можетъ. Но не-

*) Въ этомъ уравненіи $\sqrt{4+x}$ и $\sqrt{x}$ обозначають *положительныя* числа: мы оставляемъ пока въ сторонѣ двойное значеніе радикаловъ. Это замѣчаніе относится и къ остальнымъ примѣрамъ настоящей главы.

извѣстно еще, удовлетворитъ ли на самомъ дѣлѣ уравненію (1) найденное рѣшеніе: мы, вѣдь, могли посредствомъ двукратнаго возвышенія въ степень ввести постороннія рѣшенія (§ 126). Необходимо въ этомъ удостовѣриться, подставивъ въ данное уравненіе найденное рѣшеніе: первая его часть тогда преобразуется такъ:

$$\sqrt{4+x} = \sqrt{4+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2},$$

а вторая

$$4-\sqrt{x} = 4-\sqrt{\frac{9}{4}} = 4-\frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

Слѣдовательно, рѣшеніе годится; испытаніе его все же было необходимо.

Примѣръ II.—Пусть будетъ дано еще такое уравненіе

$$\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1. \qquad (1)$$

Чтобы избавиться отъ одного изъ радикаловъ, его сначала *уединяютъ* въ одной изъ частей уравненія и получаютъ,

$$\sqrt{x-\sqrt{1-x}} = \sqrt{x}-1; \qquad (2)$$

послѣ этого возвышаютъ обѣ части въ квадратъ:

$$x-\sqrt{1-x} = x-2\sqrt{x}+1, \qquad (3)$$

или, послѣ упрощенія и перемѣны знаковъ,

$$\sqrt{1-x} = 2\sqrt{x}-1. \qquad (4)$$

Возвышая снова въ квадратъ, получаемъ:

$$1-x = 4x-4\sqrt{x}+1, \qquad (5)$$

или, послѣ перенесенія членовъ и приведенія подобныхъ,

$$4\sqrt{x} = 5x. \qquad (6)$$

Возвышая въ квадратъ въ третій разъ, получаемъ:

$$16x = 25x^2; \qquad (7)$$

это уравненіе послѣ перенесенія всѣхъ членовъ въ первую часть можно представить въ видѣ:

$$x(16-25x) = 0. \qquad (8)$$

Чтобы произведеніе двухъ множителей равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ нихъ равнялся нулю, и поэтому рѣшенія уравненія (8) будутъ:

$$x = 0, \quad x = \frac{16}{25}.$$

Другихъ рѣшеній кромѣ этихъ уравненіе (1) не можетъ имѣть. А чтобы узнать, будутъ ли на самомъ дѣлѣ найденныя рѣшенія рѣшеніями уравненія (1), подставимъ ихъ туда. При $x = 0$ получимъ: $-\sqrt{-1} = 1$, а это ничего не выражаетъ. При $x = \frac{16}{25}$ получаемъ:

$$\sqrt{\frac{16}{25}} - \sqrt{\frac{16}{25} - \sqrt{\frac{9}{25}}} = 1,$$

или, послѣ упрощенія,

$$\frac{4}{5} - \frac{1}{5} = 1,$$

что — невозможно. Такимъ образомъ ни одно изъ двухъ найденныхъ рѣшеній не удовлетворяетъ уравненію (1).

Не трудно замѣтить, что значеніе $x = 0$ удовлетворяетъ уравненію:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{1 - x}} = 1,$$

а значеніе $x = \frac{16}{25}$ уравненію

$$\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1,$$

и что оба эти уравненія приводятся къ одному и тому же уравненію (7), какъ и заданное уравненіе, и при помощи такихъ же преобразованій.

§ 130. **Неизвѣстная входитъ въ уравненіе только въ одной опредѣленной степени; тогда, принявъ послѣднюю за новую неизвѣстную, данное уравненіе можно разсматривать, какъ уравненіе первой степени.**

Примѣръ [illegible]. — Пусть будетъ дано уравненіе

$$\frac{a}{1 + 2x} + \frac{a}{1 - 2x} = 2b. \qquad (1)$$

Умножаемъ обѣ его части на произведеніе: $(1 + 2x)(1 - 2x)$, или, что все равно, на $(1 - 4x^2)$; получаемъ:

$$a(1 - 2x) + a(1 + 2x) = 2b\,(1 - 4x^2), \qquad (2)$$

или, выполнивъ умноженія и опустивъ члены, взаимно уничтожающіеся, напишемъ:

$$2a = 2b - 8bx^2. \qquad (3)$$

Если теперь принять x^2 за неизвѣстную, то уравненіе (3) станетъ уравненіемъ первой степени и изъ него мы получимъ:

$$x^2 = \frac{b-a}{4b}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{b-a}{4b}}. \qquad (4)$$

§ 131. Неизвѣстная входитъ въ уравненіе только подъ знакомъ радикала одного вида; оно будетъ — первой степени, если этотъ радикалъ примемъ за новую неизвѣстную.

Примѣръ IV.—Пусть будетъ дано уравненіе

$$\frac{ax - b^2}{\sqrt{ax} + b} - \frac{\sqrt{ax} - b}{c} = c. \qquad (1)$$

Такъ какъ числитель первой дроби дѣлится на ея знаменатель, то мы можемъ написать:

$$\sqrt{ax} - b - \frac{\sqrt{ax} - b}{c} = c, \qquad (2)$$

или, по уничтоженіи оставшагося знаменателя,

$$c\sqrt{ax} - cb - \sqrt{ax} + b = c^2; \qquad (3)$$

полученное уравненіе — первой степени, если за неизвѣстную принять радикалъ $\sqrt{ax}$. Перенося нѣкоторые члены изъ одной части уравненія въ другую, получаемъ:

$$(c-1)\sqrt{ax} = c^2 + cb - b, \qquad (4)$$

откуда

$$\sqrt{ax} = \frac{c^2 + cb - b}{c-1} = b + \frac{c^2}{c-1}. \qquad (5)$$

Возвышая обѣ части этого уравненія въ квадратъ и дѣля ихъ затѣмъ на a, получаемъ:

$$x = \frac{1}{a}\left(b + \frac{c^2}{c-1}\right)^2. \qquad (6)$$

III. Рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ

Теперь мы покажемъ на нѣсколькихъ примѣрахъ, какую пользу могутъ принести уравненія при рѣшеніи задачъ.

§ 132. Задача I. — *Найти учетъ векселя въ 1500 фр. за 5 мѣсяцевъ до срока изъ 6% годовыхъ.*

Учетъ векселя не что иное, какъ чистая прибыль, которую онъ дастъ. Обозначаемъ этотъ учетъ черезъ x; предъявителю векселя придется получить $1500 - x$. Послѣдняя сумма, будучи помѣщена по 6% годовыхъ, должна принести въ теченіе 5 мѣсяцевъ прибыль, равную x. А такъ какъ 100 фр., помѣщенные по 6% годовыхъ, приносятъ въ одинъ мѣсяцъ 0,5 фр., а въ 5 мѣсяцевъ 2,5 фр., то, слѣдовательно, 1 фр. въ 5 мѣсяцевъ принесетъ 0,025 фр., а $(1500 - x)$ принесутъ $0{,}025 \times (1500 - x)$. На основаніи сказаннаго можемъ написать такое уравненіе

$$(1500 - x) \times 0{,}025 = x,$$

или, по раскрытіи скобокъ,

$$1500 \times 0{,}025 - 0{,}025\,x = x.$$

Это уравненіе — первой степени и, рѣшая его, мы получимъ:

$$x = \frac{1500 \times 0{,}025}{1{,}025} = 36{,}585\ldots$$

Предъявителю векселя придется получить 1500 фр. $- x =$ 1463,41 фр.

§ 133. Задача II. — *Имѣемъ два слитка серебра пробы 0,775 и 0,940: сколько нужно взять каждаго изъ нихъ для образованія куска сплава пробы 0,900 и вѣсомъ въ 25 граммовъ?*

Обозначаемъ черезъ x необходимое для нашего сплава число граммовъ перваго слитка серебра; тогда $(25 - x)$ выразитъ необходимое для нашего сплава число граммовъ второго слитка.—Вѣсъ чистаго серебра въ x граммахъ перваго слитка будетъ $x \times 0{,}775$, а въ $(25 - x)$ граммахъ второго $(25 - x) \times 0{,}940$. Слѣдовательно, все количество чистаго серебра въ сплавѣ будетъ:

$$x \times 0{,}775 + (25 - x) \times 0{,}940$$

Съ другой стороны, такъ какъ проба сплава равна 0,900, то количество чистаго серебра въ немъ будетъ $25 \times 0{,}900$, и поэтому должно существовать такое равенство

$$x \times 0{,}775 + (25 - x) \times 0{,}940 = 25 \times 0{,}900.$$

Это—уравненіе первой степени и, рѣшая его, мы получимъ . . . . $x =$ 6,гр0606. . .
Итакъ, отъ перваго слитка нужно взять . . . 6,гр0606,
" второго " " " . . . 18,гр9394.

§ 134. Задача III. — *Парижъ и Руанъ отстоятъ другъ отъ друга на 137 километровъ. Цѣна угля въ Парижѣ 4,25 фр. за 100 килограммовъ, а въ Руанѣ 4,75 фр.; издержки перевоза, за тонну и за километръ, составляютъ 0,09 фр. Въ какомъ мѣстѣ между этими городами одинаково выгодно выписывать уголь какъ изъ одного, такъ и изъ другого?*

Обозначаемъ черезъ x разстояніе искомаго мѣста отъ Парижа; $(137 - x)$ выразитъ разстояніе этого мѣста отъ Руана. Цѣна тонны угля въ Парижѣ 42,5 фр. Издержки перевоза этой тонны на разстояніе x будутъ $x \times 0,09$. Слѣдовательно, тонна угля, купленнаго въ Парижѣ, обойдется на мѣстѣ въ

$$42,5 + x \times 0,09.$$

Разсуждая подобнымъ же образомъ, найдемъ, что тонна угля, купленнаго въ Руанѣ и перевезеннаго на разстояніе $(137 - x)$, обойдется въ

$$47,5 + (137 - x) \times 0,09.$$

На основаніи сказаннаго можемъ написать.

$$42,5 + x \times 0,09 = 47,5 + (137 - x) \times 0,09$$

Это уравненіе первой степени и, рѣшая его, мы получимъ . . . . $x = 96,^{клм}2777...$

Итакъ, разстояніе искомаго мѣста отъ Парижа . . 96,клм. 278,

" " " " Руана 40,клм 722,

цѣна тонны угля въ этомъ мѣстѣ 51 фр. 16^{1} сант.

§ 135. Замѣчаніе относительно составленія уравненій по условіямъ задачи.—*Составить уравненія по условіямъ задачи* — это значитъ выразить посредствомъ одного или нѣсколькихъ уравненій тѣ условія, которымъ подчинены неизвѣстныя количества въ текстѣ задачи. Общаго правила для такого составленія дать невозможно. Пока ограничимся слѣдующимъ указаніемъ.

Разсматривая внимательно текстъ задачи, мы почти всегда увидимъ, что для рѣшенія ея необходимо сначала намѣтить количества, равныя между собою; далѣе, составить формулы, выражающія значеніе этихъ количествъ; и, наконецъ, приравнять другъ другу эти формулы. Тогда мы получимъ требуемыя уравненія. Для поясненія сказаннаго разсмотримъ вновь три предыдущія задачи.

Задача I.—Найти учетъ векселя въ 1500 фр. за 5 мѣсяцевъ до срока все равно, что найти такую сумму, которая, будучи въ обращеніи 5 мѣсяцевъ, станетъ *равною* 1500 фр.

Задача II.—Изъ серебра пробы 0,775 и серебра пробы 0,940 получить 25 граммовъ такого серебра, чтобы его проба была 0,900, все равно, что получить такой сплавъ, въ 25 граммахъ котораго вѣсъ всего чистаго серебра *равнялся* бы $0,900 \times 25$.

Задача III.—Въ этой задачѣ требуется, чтобы стоимость тонны угля, доставленнаго изъ Парижа въ искомое мѣсто, была бы *равна* стоимости тонны угля, доставленнаго туда же изъ Руана.

Замѣчаніе. — Почти во всѣхъ числовыхъ задачахъ составленіе уравненій изъ условій задачи есть, такъ сказать, переводъ съ обыкновеннаго языка на алгебраическій. Иногда бываетъ, что текстъ задачи не можетъ быть переданъ непосредственно *формулою*; но и въ этомъ случаѣ почти всегда можно избѣжать серьезныхъ затрудненій, если обращать вниманіе не на самый текстъ задачи, а на ея сущность. Мы возвратимся къ этому, когда будемъ говорить спеціально о задачахъ первой степени.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Рѣшить уравненіе

$$\frac{3+2x}{1+2x} - \frac{5+2x}{7+2x} = 1 - \frac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$$

Отв. $x = \frac{7}{8}$.

II. Рѣшить уравненіе

$$\frac{6-5x}{15} - \frac{7-2x^2}{14(x-1)} = \frac{3x+1}{21} - \frac{10x-11}{30} + \frac{1}{105}.$$

Отв. $x = 4$.

III. Рѣшить уравненіе

$$\frac{x}{2} - \frac{4(2x-3)-3(3x-1)}{6(x-1)} = \frac{3}{2}\left(\frac{x^2+2}{3x-2}\right).$$

Отв. $x = \frac{13}{3}$ и $x = 0$.

IV. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$$

Отв. $x = \frac{5}{4}$ и $x = 0$; второе значеніе не удовлетворяетъ уравненію.

V. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{a+x} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x}.$$

Отв. $x = -\frac{2a}{3}$; уравненію не удовлетворяетъ.

VI. Рѣшить уравненіе

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}.$$

Отв. $x=\frac{2a\sqrt{b}}{b+1}$.

VII. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{b}.$$

Отв. $x=a^2-\frac{(b-2a)^3}{27b}$.

VIII. Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\sqrt{\frac{1}{a^2x^2}-\frac{1}{x^4}}}.$$

Отв. $x=-\frac{4a}{3}$; уравненію не удовлетворяетъ.

IX. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}.$$

Отв. $x=\frac{25}{16}$ и $x=0$.

X. Рѣшить уравненіе

$$2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\frac{5a}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Отв. $x=\frac{3a}{4}$.

XI. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt[n]{\frac{a+x}{x}}+\sqrt[n]{\frac{a-x}{a}}=\frac{\sqrt[n]{x}}{c}.$$

Отв. $x=\frac{a}{\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{n}{n+1}}-1}$.

XII. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{a-x}+2\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x+\sqrt{ax+x^2}}$$

Отв. $x=-a$, $x=0$ и $x=\frac{64a}{1025}$; два послѣднихъ значенія уравненію не удовлетворяютъ

XIII Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{1-a}\sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt{1+a}\sqrt[4]{\frac{1-x}{1+x}}=2\sqrt[4]{1-a^2}$$

Отв. $x=a$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Общіе принципы, относящіеся къ совмѣстнымъ уравненіямъ

I Опредѣленія

§ 136. Системы уравненій. — *Системою уравненій* называется совокупность нѣсколькихъ уравненій, которыя должны удовлетворяться одними и тѣми же значеніями неизвѣстныхъ заразъ. Если каждое изъ уравненій системы содержитъ только одну неизвѣстную, то каждое уравненіе рѣшаемъ отдѣльно по методу, изложенному въ предыдущей главѣ, и у насъ будетъ столько различныхъ задачъ, сколько дано уравненій. Если же неизвѣстныя входятъ одновременно въ нѣсколько уравненій, то вопросъ становится болѣе сложнымъ.

Рѣшеніемъ системы называютъ всякую систему значеній, которыя, будучи подставлены вмѣсто неизвѣстныхъ, обращаютъ уравненія въ тождества.

§ 137. Равносильныя системы.—Двѣ системы уравненій, съ одними и тѣми же неизвѣстными, называются *равносильными*, если значенія неизвѣстныхъ, удовлетворяющія каждой изъ этихъ системъ, совершенно одинаковы, или, иными словами, если уравненія какой-угодно одной изъ этихъ системъ суть слѣдствія уравненій другой.

Если двѣ системы равносильны, то можно одну систему замѣнить другою.

II. Принципы

§ 138. Теорема I.—*Любое изъ уравненій системы можно замѣнить уравненіемъ, полученнымъ отъ сложенія по-членно *) предложенныхъ уравненій.*

---

*) Ср. съ примѣч. на стран. 64-ой.

Такимъ образомъ системы:

$$(1)\ \begin{cases} A = A', \\ B = B', \\ C = C', \\ D = D', \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} A+B+C+D=A'+B'+C'+D', & (\alpha) \\ B=B', \\ C=C', \\ D=D', \end{cases}$$

равносильны.

Дѣйствительно, обѣ части каждаго изъ уравненій системы (1) для значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ ей, принимаютъ равныя численныя величины; слѣдовательно, и обѣ части уравненія (α) при этихъ значеніяхъ неизвѣстныхъ становятся равными; а это значитъ, что всякое рѣшеніе системы (1) будетъ рѣшеніемъ системы (2). Обратно, B и B', C и C', D и D' принимаютъ равныя численныя величины для значеній неизвѣстныхъ, удовлетворяющихъ системѣ (2), а въ такомъ случаѣ и суммы $B+C+D$ и $B'+C'+D'$ примутъ равныя численныя величины. Но эти значенія неизвѣстныхъ, будучи рѣшеніями системы (2), удовлетворяютъ и уравненію (α), откуда заключаемъ, что A и A' также принимаютъ равныя численныя величины. Слѣдовательно, всякое рѣшеніе системы (2) удовлетворяетъ системѣ (1).

§ 139. Замѣчанія.—Предыдущее доказательство не зависитъ отъ числа уравненій.

Можно также сложить по-членно только часть уравненій, составляющихъ систему, и полученнымъ уравненіемъ замѣнить одно изъ данныхъ, послужившихъ для образованія новаго уравненія.

Можно до сложенія уравненій умножить каждое изъ нихъ на какое-нибудь число, такъ какъ при этомъ не измѣнятся тѣ условія, которымъ подчинены неизвѣстныя (§ 122).

Очевидно, что можно нѣкоторыя уравненія вычесть по-членно одно изъ другого.

§ 140. Теорема II.—*Если одно изъ уравненій системы рѣшено относительно какой-нибудь неизвѣстной, то можно въ оставшихся уравненіяхъ замѣнить эту неизвѣстную найденнымъ значеніемъ; такимъ образомъ данная система приводится къ другой, имѣющей одною неизвѣстною и однимъ уравненіемъ меньше.*

Такъ, напр., система:

$$\left.\begin{aligned} x &= A, \\ B &= B', \\ C &= C', \\ D &= D', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

въ которой B, B', C, C', D, D' могутъ содержать въ себѣ всѣ неизвѣстныя, а A—также всѣ, кромѣ x, равносильна слѣдующей:

$$\left.\begin{aligned} x &= A, \\ B_1 &= B_1', \\ C_1 &= C_1', \\ D_1 &= D_1', \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

гдѣ B_1, B_1', C_1, C_1', D_1, D_1' обозначаютъ выраженія, въ которыя обращаются B, B', C, C', D, D', когда замѣнимъ въ нихъ x на A.

Въ самомъ дѣлѣ, всякое рѣшеніе системы (1) придаетъ равныя численныя значенія x и A, а потому въ слѣдующихъ уравненіяхъ можно вмѣсто x подставить A; послѣ такой замѣны мы, испытывая рѣшенія, будемъ получать равные результаты, которые, очевидно, представятъ численныя значенія частей уравненій системы (2); слѣдовательно, послѣдняя система удовлетворяется всякимъ рѣшеніемъ системы (1). Обратно, всякое рѣшеніе системы (2) обращаетъ въ равныя численныя величины x и A; слѣдовательно, въ остальныхъ уравненіяхъ можно замѣнить A на x, что приведетъ къ системѣ (1). Отсюда заключаемъ, что обѣ системы равносильны.

Это доказательство не зависитъ отъ числа уравненій.

§ 141. Исключеніе неизвѣстной.—При замѣнѣ x на A въ уравненіяхъ $B=B'$, $C=C'$, $D=D'$ это неизвѣстное исчезаетъ изъ нихъ; въ такомъ случаѣ говорятъ, что неизвѣстная *исключена*. Вообще, *исключить* неизвѣстную изъ m уравненій значитъ замѣнить предложенную систему такою, ей равносильною, въ которой $(m-1)$ уравненій не содержатъ этой неизвѣстной.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Рѣшеніе системы уравненій первой степени, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ

§ 142. Опредѣлить значенія какого-угодно числа неизвѣстныхъ, вообще говоря, возможно, когда даны уравненія первой степени, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ. Въ этой главѣ мы изложимъ методы рѣшенія системъ, начиная съ простѣйшаго случая, когда дана система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными.

I. Рѣшеніе системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными

§ 143. Общій видъ уравненія первой степени съ двумя неизвѣстными.—Обозначимъ неизвѣстныя буквами x и y. Уравненіе первой степени можетъ содержать члены только трехъ видовъ: 1) члены первой степени относительно x, 2) члены первой степени относительно y и 3) извѣстные члены. Всегда можно перенести въ одну часть всѣ члены, содержащіе x и y, и соединить въ одинъ тѣ изъ нихъ, которые содержатъ одну и ту же неизвѣстную. Перенеся въ другую часть всѣ извѣстные члены и соединивъ ихъ въ одинъ, приведемъ уравненіе къ виду:

$$ax + by = c,$$

гдѣ a, b и c—извѣстныя числа. Въ этомъ видѣ мы будемъ всегда представлять уравненія, которыя желаемъ рѣшить.

§ 144. 1-й случай.—Можетъ случиться, что одно изъ уравненій содержитъ только одну изъ неизвѣстныхъ. Напр., въ системѣ

$$\left.\begin{aligned} 3x + 7y = 79, \quad (1) \\ 8x = 80 \quad (2) \end{aligned}\right\}$$

уравненіе (2) содержитъ только x и непосредственно даетъ его значеніе: $x=10$ (**§ 128**). Подставляя это значеніе въ уравненіе (1), получимъ:

$$30 + 7y = 79;$$

это уравненіе содержитъ только одну неизвѣстную y и даетъ (**§ 128**): $y = 7$.

Эти два значенія, $x = 10$, $y = 7$, очевидно, удовлетворяютъ данной системѣ; другихъ рѣшеній быть не можетъ, такъ какъ уравненіе (2) имѣетъ только одинъ корень $x = 10$, а при этомъ значеніи x уравненіе (1) удовлетворяется только однимъ значеніемъ $y = 7$.

Слѣдовательно, чтобы рѣшить систему въ этомъ частномъ случаѣ, *рѣшаютъ уравненіе, содержащее только одну изъ неизвѣстныхъ найденное для нея значеніе подставляютъ въ другое уравненіе и вновь полученное уравненіе рѣшаютъ относительно другой неизвѣстной.*

§ 145. 2-й случай.—Оба уравненія содержатъ обѣ неизвѣстныя. Этотъ случай приводится къ предыдущему при помощи исключенія одной изъ неизвѣстныхъ изъ двухъ уравненій (**§ 141**). Выполнить это исключеніе можно нѣсколькими способами.

Методъ подстановки.—Даны два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} 7x + 3y = 47, \ (1) \\ 6x - 5y = 10. \ (2) \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Уравненіе (1) можно замѣнить уравненіемъ (**§§ 118, 122**)

$$y = \frac{47 - 7x}{3},$$

которое получимъ изъ (1), перенося $7x$ во вторую часть и дѣля затѣмъ обѣ части на 3, или, какъ говорятъ, *рѣшая уравненіе* (1) *относительно* y. Система [1] равносильна такимъ образомъ слѣдующей:

$$\left.\begin{aligned} y = \frac{47 - 7x}{3}, \ (1) \\ 6x - 5y = 10. \ (2) \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Замѣнивъ теперь въ уравненіи (2) y на $\frac{47 - 7x}{3}$, получимъ (**§ 140**) равносильную систему

$$\left.\begin{aligned} y = \frac{47 - 7x}{3}, \qquad (3) \\ 6x - \frac{5(47 - 7x)}{3} = 10. \quad (4) \end{aligned}\right\} \qquad [3]$$

Уравненіе (4) заключаетъ только одну неизвѣстную x; слѣдовательно, вопросъ приведенъ къ первому случаю. Рѣшая уравненіе (4), пишемъ:

$$18x - 235 + 35x = 30,$$

откуда (**§ 128**) $x = 5$. Подставивъ это значеніе въ уравненіе (3), получимъ $y = 4$. Эти два значенія: $x = 5$, $y = 4$ представляютъ единственное рѣшеніе системы [3], а слѣдовательно, также единственное рѣшеніе и системы [1], ей равносильной.

Изложенный методъ—общій; онъ приводитъ къ слѣдующему правилу: *рѣшаютъ одно изъ уравненій относительно какой-нибудь неизвѣстной и найденное для нея значеніе* **подставляютъ** *въ другое уравненіе, которое послѣ подстановки будетъ заключать только одну, вторую, неизвѣстную; рѣшая его, получаютъ значеніе этой*

неизвѣстной. Затѣмъ подставляютъ это значенiе въ выраженiе для первой неизвѣстной и получаютъ такимъ образомъ и ея значенiе.

§ 146. Методъ сложенiя и вычитанiя.—Возвратимся къ системѣ

$$\left.\begin{aligned} 7x + 3y = 47, \quad (1) \\ 6x - 5y = 10. \quad (2) \end{aligned}\right\} \qquad [1]$$

Всегда можно въ обоихъ уравненiяхъ сдѣлать равными коэффицiенты при одной и той же неизвѣстной: для этого достаточно умножить обѣ части каждаго изъ уравненiй на коэффицiентъ, съ которымъ эта неизвѣстная входитъ въ другое уравненiе. Такъ, умножая первое уравненiе на 5, второе на 3, получимъ систему, равносильную данной (**§ 122**):

$$\left.\begin{aligned} 35x + 15y = 235, \quad (3) \\ 18x - 15y = 30. \quad (4) \end{aligned}\right\} \qquad [2]$$

Замѣчая, что коэффицiенты при y равны, но противоположны по знаку, можемъ исключить эту неизвѣстную, складывая оба уравненiя по-членно. Новое уравненiе

$$53x = 265 \qquad (5)$$

вмѣстѣ съ однимъ изъ уравненiй системы [2] или [1] образуетъ систему [3], равносильную первой.

Такимъ образомъ вопросъ приведенъ къ первому случаю (**§ 144**). Изъ уравненiя (5) находимъ $x = 5$; подставляя это рѣшенiе въ одно изъ уравненiй, напр., въ (1), получимъ $y = 4$.

Методъ этотъ—общiй; онъ приводитъ къ слѣдующему правилу: *умножаютъ каждое изъ уравненiй на коэффицiентъ, съ которымъ одна изъ неизвѣстныхъ входитъ въ другое уравненiе; полученныя уравненiя* **складываютъ** *или* **вычитаютъ**, *смотря по тому, будутъ ли коэффицiенты при разсматриваемой неизвѣстной съ противоположными или одинаковыми знаками. Такимъ образомъ получаютъ уравненiе съ одною неизвѣстною, которую и опредѣляютъ изъ этого уравненiя. Подставляя полученное значенiе въ одно изъ данныхъ уравненiй, опредѣляютъ другую неизвѣстную.*

§ 147. Замѣчанiе.—Если коэффицiенты исключаемой неизвѣстной имѣютъ общихъ дѣлителей, то за общiй коэффицiентъ *можно принять ихъ общее наименьшее кратное*; раздѣливъ послѣднее на каждый изъ нихъ и на соотвѣтствующее частное умноживъ каждое изъ уравненiй, получимъ требуемыя уравненiя.

Пусть, напр., дана система

$$\left.\begin{aligned} 36x + 7y &= 323, \\ 54x - 11y &= 377. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Общее наименьшее кратное 36 и 54 равно 108; частныя отъ дѣленія его на 36 и 54 соотвѣтственно равны 3 и 2; умножаемъ, поэтому, первое уравненіе на 3 и второе на 2, искомая равносильная система будетъ

$$\left.\begin{aligned} 108x + 21y &= 969, \\ 108x - 22y &= 754. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Знаки коэффиціентовъ при x одинаковы; слѣдовательно, надо вычесть одно уравненіе изъ другого. Вычитая изъ перваго уравненія второе, получимъ:

$$43y = 215,$$

откуда $y = 5$, и, слѣдовательно, $x = 8$.

§ 148. Другое замѣчаніе. — Найдя указаннымъ способомъ одну изъ неизвѣстныхъ, *можно опредѣлить и другую неизвѣстную тѣмъ же способомъ*, а не выводить ея значенія непремѣнно посредствомъ подстановки.

Напр., чтобы найти x въ предыдущей системѣ (1), умножимъ первое уравненіе на 11, второе на 7; получимъ:

$$\left.\begin{aligned} 396x + 77y &= 3553, \\ 378x - 77y &= 2639; \end{aligned}\right\}$$

складывая эти уравненія, находимъ:

$$774x = 6192,$$

откуда $x = 8$.

Это значеніе x не можетъ отличаться отъ того, которое нашли посредствомъ подстановки, такъ какъ на основаніи предыдущаго система (1) равносильна каждой изъ двухъ слѣдующихъ системъ:

$$\left.\begin{aligned} y &= 5, \\ 36x + 7y &= 323 \end{aligned}\right\}, \ (3) \qquad \left.\begin{aligned} x &= 8, \\ 36x + 7y &= 323, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

а эти послѣднія даютъ, и та, и другая, только по одному рѣшенію; слѣдовательно, обѣ системы должны имѣть одно и то же рѣшеніе.

§ 149. Слѣдствіе. — Такимъ образомъ мы видимъ, что система двухъ уравненій первой степени съ двумя неизвѣстными имѣетъ, вообще говоря, *единственное и опредѣленное* рѣшеніе.

II. Рѣшеніе системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными

§ 150. Правило.—*Для рѣшенія системы* (1) *трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными* x, y, z *исключаютъ одну изъ неизвѣстныхъ, напр.* z, *сначала изъ двухъ данныхъ уравненій, затѣмъ изъ послѣдняго даннаго и одного изъ двухъ первыхъ*: для этого употребляютъ или методъ подстановки (**§ 145**) или методъ сложенія и вычитанія (**§ 146**). *Такимъ образомъ получаютъ два уравненія съ двумя неизвѣстными* x *и* y; *эти уравненія вмѣстѣ съ однимъ изъ данныхъ уравненій составляютъ систему* (2), *равносильную первой*; доказывается это съ помощью тѣхъ же разсужденій, что и въ предыдущемъ параграфѣ. *Рѣшаютъ систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными* x *и* y; *подставляя найденныя для этихъ неизвѣстныхъ значенія въ одно изъ данныхъ уравненій, опредѣляютъ значеніе* z.

§ 151. Примѣръ 1.—Для начала рѣшимъ систему

$$\left.\begin{array}{r}3x+2y+4z=19,\\ 2x+5y+3z=21,\\ 3x-y+z=4.\end{array}\right\}$$

По предыдущему методу мы должны вывести изъ какого-нибудь уравненія одну изъ неизвѣстныхъ и найденное значеніе подставить въ два другихъ уравненія. Такъ какъ можно опредѣлять любую изъ трехъ неизвѣстныхъ изъ какого-угодно уравненія данной системы, то къ рѣшенію можно приступить девятью способами; въ разсматриваемомъ примѣрѣ проще всего опредѣлить y изъ третьяго уравненія, такъ какъ выраженіе для найденной неизвѣстной не будетъ въ этомъ случаѣ имѣть знаменателя. Находимъ

$$y=3x+z-4,$$

послѣ *подстановки* этого выраженія въ два первыхъ уравненія, получимъ

$$\left.\begin{array}{r}3x+2(3x+z-4)+4z=19,\\ 2x+5(3x+z-4)+3z=21.\end{array}\right\}$$

или, послѣ упрощенія,

$$\left.\begin{array}{r}9x+6z=27,\\ 17x+8z=41.\end{array}\right\}$$

Рѣшая эти уравненія по изложеннымъ методамъ (**§§ 145, 146**), найдемъ:

$$x=1,\ z=3:$$

подставляя эти значенія въ выраженіе для y,

$$y = 3x + z - 4,$$

получимъ $y = 2$. Слѣдовательно, искомое рѣшеніе системы будетъ:

$$x = 1, y = 2, z = 3.$$

Примѣръ II.— Рѣшимъ систему уравненій

$$\left.\begin{aligned} a^3 + a^2x + ay + z = 0, \\ b^3 + b^2x + by + z = 0, \\ c^3 + c^2x + cy + z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Воспользуемся вторымъ методомъ (§ 146). Такъ какъ z не имѣетъ коэффиціента, то мы исключимъ это неизвѣстное, вычитая послѣдовательно первое уравненіе изъ второго и третьяго; новая система

$$\left.\begin{aligned} b^3 - a^3 + (b^2 - a^2)\,x + (b - a)\,y = 0, \\ c^3 - a^3 + (c^2 - a^2)\,x + (c - a)\,y = 0 \end{aligned}\right\}$$

не содержитъ z. Сокращая первое уравненіе на $(b - a)$, второе на $(c - a)$, получимъ:

$$\left.\begin{aligned} b^2 + ab + a^2 + (b + a)\,x + y = 0, \\ c^2 + ac + a^2 + (c + a)\,x + y = 0 \end{aligned}\right\}$$

Для рѣшенія этой системы можно поступить такъ же, т.-е. вычесть первое уравненіе изъ второго; послѣ чего найдемъ:

$$c^2 - b^2 + a(c - b) + (c - b)x = 0.$$

Уравненіе это по сокращеніи на $(c - b)$ дастъ

$$c + b + a + x = 0,$$

откуда

$$x = -a - b - c,$$

и, слѣдовательно,

$$y = -b^2 - ab - a^2 - (b + a)x = ab + ac + bc.$$

Наконецъ, подставляя эти значенія x и y въ выраженіе

$$z = -a^3 - a^2x - ay,$$

находимъ:

$$z = -a^3 + a^2(a + b + c) - a(ab + ac + bc) = -abc.$$

III. Рѣшеніе какого-угодно числа уравненій первой степени

§ 152. Общее правило.—*Чтобы рѣшить какое-угодно число уравненій, въ которыхъ столько же неизвѣстныхъ, сколько дано уравненій, можно найти значеніе одной изъ неизвѣстныхъ изъ какого-нибудь даннаго уравненія и* **подставить (§ 140)** *это значеніе во всѣ остальныя уравненія; полученныя такимъ образомъ уравненія будутъ содержать одною неизвѣстною меньше; присоединяя къ этимъ уравненіямъ то, изъ котораго получили значеніе первой неизвѣстной, получимъ систему, равносильную данной.*

Исключеніе неизвѣстной изъ данныхъ уравненій можно произвести также по способу сложенія и вычитанія **(§ 146)**; *присоединяя къ полученной системѣ то уравненіе, которымъ пользовались для исключенія, получимъ систему, равносильную данной* **(§ 138)**.

Во всѣхъ случаяхъ рѣшеніе системы n уравненій съ n неизвѣстными приводится къ рѣшенію системы $(n-1)$ уравненій съ $(n-1)$ неизвѣстными. Рѣшеніе этой системы приводится къ рѣшенію системы $(n-2)$ уравненій съ $(n-2)$ неизвѣстными; и, продолжая поступать такимъ же образомъ далѣе, придемъ къ одному уравненію съ одною неизвѣстною.

Тогда система, равносильная данной, заключаетъ n уравненій, составленныхъ слѣдующимъ образомъ: послѣднее уравненіе содержитъ только одну неизвѣстную; $(n-1)$-ое содержитъ эту неизвѣстную и еще одну; $(n-2)$-ое — эти двѣ и третью...; наконецъ, первое уравненіе содержитъ всѣ неизвѣстныя. Очевидно, можно последовательно рѣшить всѣ эти уравненія, начиная съ послѣдняго и кончая первымъ, и такимъ образомъ найти значенія всѣхъ неизвѣстныхъ.

§ 153. Примѣръ.— Дана система

$$\left.\begin{aligned} x+2y-3z+4t&=30,\\ 2x-3y+5z-2t&=3,\\ 3x+4y-2z-t&=1,\\ 4x-y+3z-3t&=8.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Рѣшая первое уравненіе относительно x, находимъ

$$x=30-2y+3z-4t,$$

и подставляя это значеніе въ остальныя уравненія, получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} 7y + z + 10v &= 57, \\ 2y + 11z + 13v &= 89, \\ 9y + 6z + 19v &= 112 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Первое уравненіе системы (2) даетъ для z выраженіе

$$z = 57 - 7y - 10v,$$

и два послѣднія уравненія послѣ замѣны z найденнымъ выраженіемъ принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} 75y + 97v &= 538, \\ 33y + 41v &= 230. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Изъ послѣдняго уравненія опредѣляемъ y

$$y = \frac{230 - 41v}{33}$$

и, подставляя это значеніе въ предыдущее уравненіе, получаемъ

$$126v = 504. \qquad (4)$$

Такимъ образомъ система, равносильная данной, состоитъ изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} x &= 30 - 2y - 3z - 4v, \\ z &= 57 - 7y - 10v, \\ y &= \frac{230 - 41v}{33}, \\ 126v &= 504. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Изъ послѣдняго уравненія находимъ, что $v = 4$, подставляя это значеніе въ предыдущее уравненіе, получаемъ $y = 2$, изъ второго уравненія, послѣ подстановки найденныхъ значеній v и y, находимъ $z = 3$; наконецъ, подставивъ эти три значенія въ первое уравненіе, увидимъ, что $x = 1$. Таким образомъ, данная система имѣетъ слѣдующее рѣшеніе: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $v = 4$.

§ 154. Методъ Безу (Bezout). — Уравненія первой степени рѣшаютъ также при помощи иного метода, называемаго методомъ *неопредѣленныхъ коэффиціентовъ*; часто имъ бываетъ удобнѣе пользоваться, чѣмъ предыдущими.

Пусть у насъ будетъ n уравненій первой степени съ n неизвѣстными:

$$\left.\begin{aligned} ax &+ by + cz + \ldots = k, \\ a_1x &+ b_1y + c_1z + \ldots = k_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1}x &+ b_{n-1}y + c_{n-1}z + \ldots = k_{n-1}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Умножимъ обѣ части всѣхъ уравненій, кромѣ перваго, соотвѣтственно на неопредѣленныя числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$; сложивъ почленно первое уравненіе съ полученными, будемъ имѣть уравненіе.

$$\left.\begin{aligned} x(a + a_1\lambda_1 + \ldots + a_{n-1}\lambda_{n-1}) + y(b + b_1\lambda_1 + \ldots + \\ + b_{n-1}\lambda_{n-1}) + z(c + c_1\lambda_1 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{n-1}) + \ldots = \\ = k + k_1\lambda_1 + \ldots + k_{n-1}\lambda_{n-1}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

которымъ можно замѣнить одно изъ данныхъ уравненій **(§ 139)**, *каковы бы ни были числа* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Эти числа можно подобрать такъ, чтобы коэффиціенты при y, z ... были равны нулю, т.-е. чтобы удовлетворялись уравненія.

$$\left.\begin{aligned} b + b_1\lambda_1 + \ldots + b_{n-1}\lambda_{n-1} = 0, \\ c + c_1\lambda_1 + \ldots + c_{n-1}\lambda_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Для этого достаточно рѣшить $(n - 1)$ уравненій съ $(n - 1)$ неизвѣстными, а именно, рѣшить систему (3).

Рѣшивъ эту систему и подставивъ найденныя значенія для $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ въ уравненіе (2), приведемъ его къ такому

$$x(a + a_1\lambda_1 + \ldots + a_{n-1}\lambda_{n-1}) = k + k_1\lambda_1 + \ldots + k_{n-1}\lambda_{n-1}.$$

Это уравненіе содержитъ только одну неизвѣстную x и даетъ для нея выраженіе:

$$x = \frac{k + k_1\lambda_1 + \ldots + k_{n-1}\lambda_{n-1}}{a + a_1\lambda_1 + \ldots + a_{n-1}\lambda_{n-1}}.$$

Теперь, когда x опредѣлено, система содержитъ только $(n - 1)$ неизвѣстныхъ.

Указанный методъ даетъ возможность рѣшить n уравненій съ n неизвѣстными, если умѣемъ рѣшать систему, въ которой число неизвѣстныхъ на единицу меньше.

Но мы умѣемъ рѣшать систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, а потому можемъ рѣшить систему трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными; далѣе, систему четырехъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными, и т. д. Сколько бы ни было предложенныхъ уравненій, мы такимъ образомъ получимъ значеніе каждой неизвѣстной.

§ 155. Опредѣленіе остальныхъ неизвѣстныхъ съ помощью этого метода. — Методъ *множителей* даетъ возможность получить прямо каждую изъ неизвѣстныхъ, не вычисляя другихъ. Для этого достаточно поступать относительно каждой изъ неизвѣстныхъ такъ же, какъ поступали относительно x. Такъ, напр., желая опредѣлить y, въ уравненіи (2) приравниваемъ нулю коэффиціенты всѣхъ остальныхъ $(n-1)$ неизвѣстныхъ; рѣшая эти $(n-1)$ уравненій, найдемъ новыя значенія для неопредѣленныхъ множителей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ и подставляя эти значенія въ уравненіе (2), приведемъ его къ такому, которое содержитъ только одну неизвѣстную y, откуда и получаемъ ея значеніе.

Найденныя этимъ способомъ значенія для $x, y, z, \ldots$ не могутъ отличаться отъ тѣхъ, которыя получены первымъ способомъ. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе (2) должно удовлетворяться, каковы бы ни были числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$; слѣдовательно, всегда можно сдѣлать такія предположенія, при которыхъ будутъ обращаться въ нуль всѣ коэффиценты, кромѣ одного, а потому этимъ способомъ мы получимъ искомое рѣшеніе. А такъ какъ это рѣшеніе есть единственное, то оно должно совпасть съ рѣшеніемъ, полученнымъ первымъ способомъ.

§ 156. Примѣръ. — Примѣнимъ этотъ методъ къ рѣшенію системы

$$\left.\begin{aligned} 3x - 4y + 5z &= 9, \\ 7x + 2y - 10z &= 18, \\ 5x - 6y - 15z &= 6 \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Умножимъ второе уравненіе на λ_1, третье на λ_2 и сложимъ полученныя уравненія почленно съ первымъ.

$$(3 + 7\lambda_1 + 5\lambda_2)x + (-4 + 2\lambda_1 - 6\lambda_2)y + (5 - 10\lambda_1 - 15\lambda_2)z = \\ = 9 + 18\lambda_1 + 6\lambda_2 \qquad (2)$$

Для опредѣленія x приравниваемъ нулю коэффиценты при y и z

$$\left\{\begin{aligned} -4 + 2\lambda_1 - 6\lambda_2 &= 0, \\ 5 - 10\lambda_1 - 15\lambda_2 &= 0, \end{aligned}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{aligned} \lambda_1 - 3\lambda_2 &= 2, \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 1 \end{aligned}\right.$$

Рѣшая эти два уравненія, находимъ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$. Подставляя найденныя значенія въ уравненіе (2), получаемъ:

$$\left(3 + 7 - \frac{5}{3}\right)x = 9 + 18 - 2, \text{ откуда } x = 3$$

Для нахожденія y приравниваемъ нулю коэффиціенты при x и z

$$\begin{cases} 3 + 7\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0, \\ 5 + 10\lambda_1 - 15\lambda_2 = 0, \end{cases}$$

откуда $\lambda_1 = -\frac{14}{11}$, $\lambda_2 = \frac{13}{11}$ подставляя эти значенія въ уравненіе (2), приводимъ его къ такому

$$\left(-4 - \frac{28}{11} - \frac{78}{11}\right)y = 9 - \frac{252}{11} + \frac{78}{11}, \text{ откуда } y = \frac{1}{2}.$$

Наконецъ, для нахожденія z рѣшаемъ систему

$$\begin{cases} 3 + 7\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0, \\ -4 + 2\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

и рѣшеніе ея, $\lambda_1 = \frac{1}{26}$, $\lambda_2 = \frac{17}{26}$, подставляемъ въ уравненіе (2); получаемъ:

$$\left(5 - \frac{10}{26} + \frac{255}{26}\right)z = 9 + \frac{18}{26} - \frac{102}{26}, \text{ откуда } z = \frac{2}{5}$$

§ 157. Случай, когда коэффиціенты при неизвѣстныхъ представляютъ большія числа. — Если надо рѣшить систему, въ которой коэффиціенты при неизвѣстныхъ велики, то обыкновенно прибѣгаютъ къ методу подстановки, какъ болѣе удобному. Рѣшимъ, для примѣра, слѣдующую систему:

$$\left.\begin{array}{lr} 1{,}2345x + 1{,}3579y + 8{,}642z - 9{,}765744 = 0, & (1) \\ 7{,}447x + 5{,}225y - 6{,}336z - 0{,}611327 = 0, & (2) \\ 1{,}5380x + 4{,}4444y - 5{,}6789z - 1{,}20011 = 0. & (3) \end{array}\right\}$$

Изъ перваго уравненія находимъ для z выраженіе

$$z = -\frac{1{,}2345x + 1{,}3579y - 9{,}765744}{8{,}642}.$$

Подставляя это значеніе z въ уравненіе (2), имѣемъ:

$$7{,}447x + 5{,}225y + 6{,}336 \times \frac{1{,}2345x + 1{,}3579y - 9{,}765744}{8{,}642} - 0{,}611327 = 0$$

Умножая всѣ члены на знаменатель 8,642, получаемъ:

$$64,356974x + 45,15440y - 61,875754 + 7,521792x + 8,603654y - 5,283088 = 0$$

или

$$72,17877x + 53,75810y - 67,15884 = 0. \qquad (4)$$

Подставивъ то же значеніе z въ уравненіе (3), найдемъ

$$1,5380x + 4,4444y - 5,6789 \times \frac{1,2345x + 1,3579y - 9,765744}{8,642} + 1,20011 = 0,$$

откуда

$$13,291396x + 38,408505y - 55,458684 + 7,010602x + 7,711378y + 10,371351 = 0,$$

или

$$20,30200x + 46,11988y - 45,08733 = 0. \qquad (5)$$

Теперь вопросъ приведенъ къ рѣшенію двухъ уравненій, (4) и (5), съ двумя неизвѣстными. Изъ послѣдняго уравненія имѣемъ:

$$y = -\frac{20,302x - 45,08733}{46,11988}.$$

Подставивъ это значеніе y въ уравненіе (4), получимъ:

$$72,17877x - 53,7581 \times \frac{20,302x - 45,08733}{46,11988} - 67,15884 = 0;$$

послѣ умноженія на знаменатель 46,11988 уравненіе приметъ видъ

$$3328,876x - 1091,397x + 2423,809 - 3097,358 = 0,$$

или

$$2237,479x - 673,549 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{673,549}{2237,479} = 0,301030.$$

Для опредѣленія y вычисляемъ сначала $20,302x$:

$$20,302x = 6,11151,$$

слѣдовательно,

$$45,08733 - 20,302x = 38,97582,$$

а

$$y = \frac{38,97582}{46,11988} = 0,845098.$$

Теперь подставимъ найденныя значенія x и y въ уравненіе

$$z = -\frac{1,2345x + 1,3579y - 9,765744}{8,642},$$

но предварительно опредѣлимъ.

$$1,2345x = 0,3716215,$$
$$1,3579y = 1,1475586,$$
$$9,765744 - 1,2345x - 1,3579y = 8,246564;$$

получимъ:

$$z = \frac{8,246564}{8,642} = 0,9542425$$

Итакъ,

$$x = 0,3[illegible]3, \quad y = 0,8450980, \quad z = 0,9542425$$

Поверка

$$\left.\begin{array}{ll} 1,2345x = 0,3716215 & \\ 1,3579y = 1,1475586 & \\ 8,642z = 8,2465639 & \\ \overline{9,765744} & 9,765744 = [illegible] \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{ll} 7,44x = 2,2[illegible] & 6,336z = 6,[illegible] \\ 5,215y = 4,415[illegible] & 0,511[illegible]27 \\ 6,65[illegible]407 & 6,65[illegible] \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} 1,538x = 0,46298414 & \\ 4,4444y = 3,75595355 & \\ 1,20011000 & \\ \overline{5,4190477} & 5,6789z = 5,4190477. \end{array}\right\} \quad (3)$$

IV. Упрощенія и различныя замѣчанія

§ 158. Случай, когда не всѣ неизвѣстныя входятъ сразу во всѣ уравненія. — Можетъ случиться, что не каждое изъ уравненій содержитъ всѣ неизвѣстныя. Тогда вычисленія упрощаются, такъ какъ можно разсматривать неизвѣстную, не входящую въ какое нибудь уравненіе, какъ исключенную изъ него. Въ этомъ случаѣ слѣдуетъ начать исключеніе съ той неизвѣстной, которая входитъ въ наименьшее число уравненій.

Разсмотримъ, напр., такую систему

$$\begin{cases} 5x - 2z + u = 41, & (1) \\ 7y - 5z - t = 12 & (2) \\ 4y - 3x + 2u = 5, & (3) \\ 3y - 4u + 3t = 7, & (4) \\ 7z - 5u = 11 & (5) \end{cases}$$

Здѣсь t входитъ только въ два уравненія; для исключенія этой неизвѣстной изъ всей системы уравненій, опредѣлимъ его изъ уравненія (2):

$$t = 7y - 5z - 12 \qquad (2)$$

и подставимъ это значеніе въ уравненіе (4)

$$24y - 15z - 4u = 43 \qquad (6)$$

Присоединяя это уравненіе (6) къ уравненіямъ (1), (3) и (5), получаемъ систему четырехъ уравненій съ четырьмя неизвѣстными: x, y, z, u. Неизвѣстная x входитъ только въ уравненія (1) и (3). Изъ уравненія (3) выводимъ:

$$x = \frac{4y + 2u - 5}{3}. \qquad (3)$$

и, подставляя это значеніе въ уравненіе (1), получаемъ

$$12y - 2z + 7u = 56. \qquad (7)$$

Присоединяя послѣднее уравненіе (7) къ двумъ уравненіямъ (5) и (6), получаемъ систему трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными: y, z, u. Неизвѣстная y входитъ только въ два уравненія (6) и (7); изъ уравненія (7) имѣемъ:

$$y = \frac{2z - 7u + 56}{12}; \qquad (7)$$

подставляя это значеніе въ уравненіе (6), получаемъ

$$11z + 18u = 69. \qquad (8)$$

Это уравненіе вмѣстѣ съ уравненіемъ (5) составляетъ систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными. Изъ уравненія (5) находимъ

$$u = \frac{7z - 11}{5};$$

подставляя это значеніе въ уравненіе (8), имѣемъ:

$$11z + \frac{18(7z - 11)}{5} = 69.$$

Изъ этого уравненія съ одною неизвѣстною получаемъ $z = 3$.

Слѣдовательно, уравненіе (5) дастъ $u = 2$,
" (7) " $y = 4$,
" (3) " $x = 5$,
" (2) " $t = 1$

§ 159. Частные пріемы. — Иногда случается, что уравненія представляютъ нѣкоторую симметрію относительно неизвѣстныхъ; въ этомъ случаѣ обыкновенно можно прибѣгнуть къ пріемамъ, скорѣе

приводящимъ къ рѣшенію вопроса, чѣмъ общіе методы. Нельзя дать общихъ правилъ для такихъ пріемовъ, но съ наиболѣе употребительными изъ нихъ не мѣшаетъ познакомиться на нѣсколькихъ частныхъ примѣрахъ.

Примѣръ I. — Дана система

$$\begin{cases} x+y+z+t=a, & (1)\\ y+z+t+v=b, & (2)\\ z+t+v+x=c, & (3)\\ t+v+x+y=d, & (4)\\ v+x+y+z=e. & (5)\end{cases}$$

Складывая всѣ эти уравненія, замѣчаемъ, что каждая неизвѣстная войдетъ въ сумму четыре раза; такъ что, обозначая черезъ s сумму вторыхъ частей, т.-е. $(a+b+c+d+e)$, получимъ:

$$4(x+y+z+t+v)=s,$$

или

$$x+y+z+t+v=\frac{s}{4} \qquad (6)$$

Итакъ, мы опредѣлили сумму всѣхъ пяти неизвѣстныхъ, а такъ какъ каждое изъ уравненій содержитъ четыре неизвѣстныхъ, то каждая изъ неизвѣстныхъ опредѣлится при послѣдовательномъ вычитаніи данныхъ уравненій изъ уравненія (6). Такимъ образомъ находимъ:

$$v=\frac{s}{4}-a,\ x=\frac{s}{4}-b,\ y=\frac{s}{4}-c,\ z=\frac{s}{4}-d,\ t=\frac{s}{4}-e.$$

Примѣръ II. — *Найти длины трехъ сторонъ треугольника, зная длины медіанъ, т.-е. прямыхъ линій, соединяющихъ каждую вершину съ срединой противоположной стороны.*

Пусть a, b, c — неизвѣстныя длины сторонъ, а α, β, γ — длины соотвѣтственныхъ *медіанъ*. Изъ геометріи получаемъ непосредственно три уравненія:

$$\begin{cases} b^2+c^2=2\alpha^2+\dfrac{a^2}{2}, & (1)\\ c^2+a^2=2\beta^2+\dfrac{b^2}{2}, & (2)\\ a^2+b^2=2\gamma^2+\dfrac{c^2}{2}. & (3)\end{cases}$$

Складывая эти уравненія по-членно, имѣемъ:

$$2(a^2+b^2+c^2)=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

или

$$a^2+b^2+c^2=\frac{4}{3}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2). \qquad (4)$$

Такимъ образомъ мы опредѣлили сумму квадратовъ трехъ сторонъ. Вычитая изъ уравненія (4) первое изъ данныхъ, найдемъ:

$$a^2 = \frac{4}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - 2\alpha^2 - \frac{a^2}{2}$$

откуда

$$a^2 = \frac{4}{9}(2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2).$$

Точно такъ же могли бы найти b^2 и c^2, вычитая изъ (4) послѣдовательно уравненія (2) и (3). Но проще замѣтить, что уравненіе (2) получится изъ (1) посредствомъ замѣны въ послѣднемъ b^2 на c^2, c^2 на a^2, a^2 на b^2 и α^2 на β^2; слѣдовательно, сдѣлавъ такую же перестановку буквъ въ выраженіи для a^2, получимъ значеніе b^2:

$$b^2 = \frac{4}{9}(2\gamma^2 + 2\alpha^2 - \beta^2).$$

Точно такъ же найдемъ, что

$$c^2 = \frac{4}{9}(2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2).$$

Зная же квадраты сторонъ, опредѣлимъ и самыя стороны a, b, c.

Примѣръ III. — Рѣшить систему

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{v}{d}, \\ mx + ny + pz + qv = k. \end{cases}$$

Было доказано (**§ 93**), что

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{v}{d} = \frac{mx + ny + pz + qv}{ma + nb + pc + qd}.$$

Но числитель послѣдней дроби равенъ k; слѣдовательно,

$$x = \frac{ak}{ma + nb + pc + qd}.$$

Такимъ же образомъ,

$$y = \frac{bk}{ma + nb + pc + qd},$$

$$z = \frac{ck}{ma + nb + pc + qd},$$

$$v = \frac{dk}{ma + nb + pc + qd}.$$

V. Случаи, когда число неизвѣстныхъ не равно числу уравненій

§ 160. Случай, когда число уравненій больше числа неизвѣстныхъ.— Пусть, напр., дана система трехъ уравненій съ двумя неизвѣстными x и y. Рѣшая два изъ этихъ трехъ уравненій по какому-нибудь изъ извѣстныхъ методовъ, мы найдемъ x и y; другими значеніями неизвѣстныхъ, кромѣ найденныхъ, система удовлетворяться не можетъ. Но, чтобы она дѣйствительно удовлетворялась ими, необходимо, чтобы ими удовлетворялось и третье уравненіе, а потому, если это условіе не выполнено, то *система невозможна.*

Напр., система

$$\begin{cases} 3x + 7y = 17, \\ 5x - 2y = 1 \\ 8x + y = 12 \end{cases}$$

невозможна, такъ какъ рѣшеніе $x = 1$, $y = 2$ первыхъ двухъ уравненій не удовлетворяетъ третьему, обращая первую его часть въ 10.

Вообще, имѣя $(m+p)$ уравненій съ m неизвѣстными, можемъ рѣшить m изъ этихъ уравненій и получить такимъ образомъ тѣ значенія неизвѣстныхъ, которыми только и можетъ удовлетворяться система; но эти значенія должны удовлетворять и остальнымъ p уравненіямъ, въ противномъ случаѣ система невозможна.

Если въ уравненіяхъ всѣ коэффиціенты, или нѣкоторые изъ нихъ, выражены буквами, значеніе которыхъ не опредѣлено, то значенія, которыя мы найдемъ для неизвѣстныхъ, будутъ представлены формулами, зависящими отъ этихъ буквъ; подставляя эти формулы въ p изъ оставшихся уравненій, получимъ p соотношеній, выражающихъ необходимыя и достаточныя *условія*, которымъ должны удовлетворять буквенные коэффиціенты, чтобы система была возможна. Эти соотношенія называются *условными уравненіями.*

Напр., дана система

$$\begin{cases} x + y = 2a, \\ x - y = 2b, \\ 2x + 3y = a + 2b \\ 3x + 4y = 2a + 3b. \end{cases}$$

Два первыхъ уравненія даютъ $x = a + b$, $y = a - b$. Подставляя эти значенія въ два послѣднихъ уравненія, получаемъ условныя уравненія:

$$\begin{cases} 5a - b = a + 2b, \\ 7a - b = 2a + 3b - 1, \end{cases}$$

откуда $a = 3$, $b = 4$. Только при этихъ значеніяхъ a и b система возможна и рѣшеніе ея будетъ $x = 7$, $y = -1$.

§ 161. Случай, когда число неизвѣстныхъ больше числа уравненій.— Пусть у насъ будетъ, напр., система двухъ уравненій съ тремя неизвѣстными x, y, z. Если разсматривать одну изъ неизвѣстныхъ, напр. z, какъ извѣстную, то, рѣшая систему относительно x и y, получимъ двѣ формулы, содержащія z; слѣдовательно, можно давать z произвольныя значенія, и для каждаго изъ нихъ мы получимъ соотвѣтственныя значенія x и y. Отсюда заключаемъ, что *система имѣетъ безконечное число рѣшеній*, т.-е. она *неопредѣленная*.

Вообще, если дано m уравненій съ $(m+p)$ неизвѣстными, то можно разсматривать p изъ этихъ неизвѣстныхъ, какъ извѣстныя, и рѣшать m уравненій относительно m остальныхъ неизвѣстныхъ, которыя въ этомъ случаѣ выразятся m формулами, содержащими p первыхъ неизвѣстныхъ; этимъ p неизвѣстнымъ можно давать совершенно произвольныя значенія, при чемъ по найденнымъ формуламъ каждый разъ опредѣлимъ соотвѣтственныя значенія другихъ неизвѣстныхъ. Изъ этого видно, что система—неопредѣленная.

Примѣръ.—Имѣемъ систему

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z - 3t = 6, \\ x - 2y + 3z - 2t = 2. \end{cases}$$

Переносимъ члены съ z и t во вторую часть и рѣшаемъ систему относительно x и y; находимъ слѣдующія двѣ формулы:

$$x = \frac{18 - z + 12t}{7},$$

$$y = \frac{2 + 10z - t}{7}.$$

Полагая *произвольно* $z = 2$, $t = 1$, находимъ $x = 4$, $y = 3$.

VI. Случаи невозможности и неопредѣленности

§ 162. Случай невозможности. — Иногда, рѣшая систему, въ которой число уравненій равно числу неизвѣстныхъ, мы приходимъ къ противорѣчивымъ результатамъ.

1. Пусть будетъ дана система

$$\begin{cases} 9x - 12y = 6, \\ 21x - 28y = 15 \end{cases}$$

Примѣнимъ методъ сложенія и вычитанія (§ 146): для исключенія y умножимъ первое уравненіе на 7, а второе на 3; получимъ:

$$\begin{cases} 63x - 84y = 42, \\ 63x - 84y = 45. \end{cases}$$

уравненія, очевидно, несовмѣстныя. вычитая изъ второго первое, нашли бы

$$0 = 3.$$

Слѣдовательно, данная система невозможна; и эта невозможность видна изъ того, что при исключеніи одной изъ неизвѣстныхъ исчезаетъ и другая, и получается равенство между неравными числами

2. Дана система

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7, \\ 3x - 2y + z = 8, \\ 11x - 9y + 7z = 30 \end{cases}$$

Исключая z сначала изъ двухъ первыхъ уравненій, затѣмъ изъ двухъ послѣднихъ, получаемъ систему

$$\begin{cases} 10x - 5y = 25, \\ 10x - 5y = 26; \end{cases}$$

очевидно, эти уравненія несовмѣстны. Слѣдовательно, система—невозможна и эта невозможность видна изъ того, что, исключая z, получаемъ два уравненія, разность между которыми даетъ невозможное равенство $0 = 1$,

§ 163. Случай неопредѣленности.—Иногда, рѣшая систему уравненій, приходимъ къ равенствамъ, которыя **имѣютъ мѣсто, каковы бы ни были значенія неизвѣстныхъ.**

1 Пусть дана система

$$\begin{cases} 91x + 63y = 217. \\ 65x + 45y = 155. \end{cases}$$

Для исключенія y умножимъ первое уравненіе на 5, второе на 7:

$$\begin{cases} 455x + 315y = 1085, \\ 455x + 315y = 1085 \end{cases}$$

Эти уравненія тождественны, а потому *предложенныя уравненія заключаются одно въ другомъ*: въ этомъ случаѣ имѣемъ, собственно говоря, одно уравненіе съ двумя неизвѣстными, для котораго, слѣдовательно, существуетъ безконечное число рѣшеній (§ 161). Неопредѣленность видна изъ того, что при исключеніи одной изъ неизвѣстныхъ исчезаетъ и другая, и получается тождество $0=0$.]

2. Дана система

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7, \\ 3x - 2y + z = 8, \\ 11x - 9y + 7z = 31. \end{cases}$$

Исключая z изъ двухъ первыхъ уравненій, затѣмъ изъ двухъ послѣднихъ, приходимъ къ системѣ

$$\begin{cases} 10x - 5y = 25, \\ 10x - 5y = 25, \end{cases}$$

въ которой оба уравненія тождественны. Но вмѣстѣ съ однимъ изъ данныхъ уравненій они составляютъ систему, равносильную данной, а потому, на самомъ дѣлѣ, мы имѣемъ систему двухъ уравненій съ тремя неизвѣстными; слѣдовательно, данная система неопредѣленна, и эта неопредѣленность видна изъ того, что исключеніе двухъ изъ трехъ неизвѣстныхъ приводитъ къ тождеству.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Рѣшить систему

$$\begin{cases} x + ay = b, \\ ax - by = c. \end{cases}$$

Отв. $x = \dfrac{b^2 + ac}{a^2 + b}, \quad y = \dfrac{ab - c}{a^2 + b}$.

II. Рѣшить систему

$$\begin{cases} (a - b)x + (a + b)y = c, \\ (a^2 - b^2)(x + y) = d. \end{cases}$$

Отв. $x = \dfrac{1}{2b}\left(\dfrac{d}{a - b} - c\right), \quad y = \dfrac{1}{2b}\left(c - \dfrac{d}{a + b}\right)$.

III. Рѣшить систему

$$\begin{cases} \dfrac{p}{x} + \dfrac{q}{y} = a, \\ \dfrac{q}{x} + \dfrac{p}{y} = b. \end{cases}$$

Отв. Принимаемъ за вспомогательныя неизвѣстныя $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ и находимъ:

$$x = \frac{p^2 - q^2}{ap - bq}, \quad y = \frac{p^2 - q^2}{bp - aq}$$

IV. Рѣшить систему

$$\begin{cases} (a^2 - b^2)(5x + 3y) = 2ab(4a - b), \\ a^2y - \frac{ab^2c}{a+b} + (a + b + c)bx = b^2y + ab(a + 2b). \end{cases}$$

Отв. $x = \frac{ab}{a+b}, \quad y = \frac{ab}{a-b}$.

V. Рѣшить систему

$$\begin{cases} \sqrt{y} - \sqrt{20 - x} = \sqrt{y - x}, \\ 3\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x} \end{cases}$$

Отв. $x = 16, \quad y = 25$.

VI. Рѣшить систему

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ (a + b)x - (a + c)y + (b + c)z = 0, \\ abx - acy + bcz = 1. \end{cases}$$

Отв. $x = \frac{1}{(a-c)(b-c)}, \quad y = \frac{1}{(a-b)(b-c)}, \quad z = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$.

VII. Рѣшить систему

$$\begin{cases} a^4 + a^3x + a^2y + az + u = 0, \\ b^4 + b^3x + b^2y + bz + u = 0, \\ c^4 + c^3x + c^2y + cz + u = 0, \\ d^4 + d^3x + d^2y + dz + u = 0. \end{cases}$$

Отв. $x = -(a + b + c + d), \quad y = ab + ac + ad + bc + bd + cd,$
$z = -(abc + abd + acd + bcd), \quad u = abcd.$

VIII. Рѣшить систему

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1, \\ a^n + b^n + c^n = d^n, \\ \frac{x^m}{a^{m+n}} = \frac{y^m}{b^{m+n}} = \frac{z^m}{c^{m+n}} \end{cases}$$

и исключить a, b, c

Отв. $\left(\frac{x}{a}\right)^m = \left(\frac{a}{d}\right)^n, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^m = \left(\frac{b}{d}\right)^n, \quad \left(\frac{z}{c}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^n$

и

$$x^{\frac{mn}{m+n}} + y^{\frac{mn}{m+n}} + z^{\frac{mn}{m+n}} = d^{\frac{mn}{m+n}}.$$

IX. Рѣшить систему

$$\begin{cases} ax^3 = by^3 = cz^3, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{d} \end{cases}$$

и вычислить

$$ax^2 + by^2 + cz^2$$

Отв. $x = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{a}},$

$$y = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{b}},$$

$$z = \frac{d(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})}{\sqrt[3]{c}};$$

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = d^2(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c})^3.$$

X. Рѣшить систему

$$\begin{cases} ax + m(y + z + v) = k, \\ by + m(z + v + x) = l, \\ cz + m(v + x + y) = p, \\ dv + m(x + y + z) = q. \end{cases}$$

Отв. Ищемъ сначала сумму s неизвѣстныхъ:

$$s = \frac{k(b-m)(c-m)(d-m) + l(a-m)(c-m)(d-m) + p(a-m)(b-m)(d-m) + q(a-m)(b-m)(c-m)}{(a-m)(b-m)(c-m)(d-m) + m[(b-m)(c-m)(d-m) + (a-m)(c-m)(d-m) + (a-m)(b-m)(d-m) + (a-m)(b-m)(c-m)]},$$

и затѣмъ.

$$x = \frac{k - ms}{a - m}, \quad y = \frac{l - ms}{b - m}, \quad z = \frac{p - ms}{c - m}, \quad v = \frac{q - ms}{d - m}.$$

ГЛАВА ПЯТАЯ

Рѣшеніе задачъ первой степени

§ 164. Рѣшеніе задачи состоитъ изъ трехъ различныхъ частей: 1) *составленія уравненій*, 2) *рѣшенія этихъ уравненій* и 3) *изслѣдованія* рѣшенія.

Задача считается *задачею первой степени*, если рѣшеніе ея приводится къ рѣшенію уравненій первой степени. Находить рѣшенія такихъ уравненій мы уже умѣемъ и, поэтому, намъ остается заняться только 1-ою и 3-ею частями.

I. Составленіе уравненій по условіямъ задачи

§ 165. Правило для составленія уравненій по условіямъ задачи.— Мы уже имѣли случай замѣтить (**§ 135**), что для полученія уравненій изъ условій задачи нельзя дать вполнѣ общаго правила; обыкновенно ограничиваются слѣдующимъ указаніемъ:

Послѣ подробнаго разсмотрѣнія условій задачи обозначаютъ посредствомъ буквъ x, y, . . . тѣ числа, знаніе которыхъ дало бы рѣшеніе. Далѣе, посредствомъ алгебраическихъ знаковъ указываютъ, какія надъ этими буквами и надъ данными величинами нужно произвести дѣйствія, если бы мы послѣ нахожденія неизвѣстныхъ величинъ захотѣли испытать, дѣйствительно ли послѣднія удовлетворяютъ всѣмъ условіямъ задачи. Эти вычисленія при испытаніи должны дать, вообще говоря, равные результаты: приравнивая, поэтому, другъ другу формулы, выражающія эти результаты, получаютъ уравненія задачи.

Покажемъ на примѣрахъ, какъ пользоваться этимъ правиломъ.

§ 166. Задача I.— *Резервуаръ, наполненный водою, былъ опорожненъ двумя кранами, A и B, неодинаковой величины. Сначала открыли кранъ A и выпустили четверть всей воды. Затѣмъ, оставивъ кранъ A открытымъ, открыли B и выпустили остальную воду; для этого потребовалось времени на $\frac{5}{4}$ ч. больше, чѣмъ сколько нужно было, чтобы опорожнить $\frac{1}{4}$ всего резервуара однимъ краномъ A. Еслибы открыли оба крана съ самаго начала, то резервуаръ былъ бы опорожненъ на $\frac{1}{4}$ ч. раньше. Спрашивается, во сколько времени былъ бы опорожненъ весь резервуаръ краномъ A?*

Обозначимъ число часовъ, въ теченіи которыхъ резервуаръ можетъ быть опорожненъ краномъ A, буквою x. Четверть резервуара черезъ этотъ кранъ будетъ опорожнена въ теченіи $\frac{x}{4}$. Оставшіяся $\frac{3}{4}$ резервуара будутъ опорожнены черезъ два крана, открытыхъ одновременно, въ теченіи $\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$. Слѣдовательно, чтобы опорожнить весь резервуаръ черезъ оба крана, открытыхъ одновременно, потребуется $\frac{4}{3}$ этого времени, т.-е. $\frac{x}{3} + \frac{5}{3}$.

Съ другой стороны, мы знаемъ, что резервуаръ на самомъ дѣлѣ былъ опорожненъ сначала на $\frac{1}{4}$ черезъ кранъ A, а потомъ до конца черезъ оба крана A и B одновременно, въ теченіи $\frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4} + \frac{5}{4}\right)$, или, что все равно, $\frac{x}{2} + \frac{5}{4}$.

А такъ какъ по условію задачи это время на $\frac{1}{4}$ часа больше времени, необходимаго для опорожненія резервуара черезъ оба крана заразъ, то мы можемъ написать такое уравненіе:

$$\frac{x}{3} + \frac{5}{3} = \frac{x}{2} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4},$$

откуда

$$x = 4 \text{ ч.}$$

Испытаніе. $\frac{1}{4}$ резервуара черезъ кранъ A будетъ опорожнена въ 1 ч.; слѣдовательно, время, въ теченіи котораго будутъ опорожнены остальныя $\frac{3}{4}$ резервуара черезъ оба крана одновременно, равно 1 ч. $+ \frac{5}{4}$ ч., или $\frac{9}{4}$ ч., а время, въ теченіи котораго черезъ оба же крана будетъ опорожненъ весь резервуаръ, составитъ $\frac{4}{3}$ отъ $\frac{9}{4}$ ч., т.-е. 3 ч. Съ другой стороны, на самомъ дѣлѣ резервуаръ былъ опорожненъ въ теченіе 1 ч. $+ \frac{9}{4}$ ч., или $3\frac{1}{4}$ ч. Слѣдовательно, на самомъ дѣлѣ затрачено времени на $\frac{1}{4}$ ч. болѣе, чѣмъ потребовалось бы для опорожненія бассейна черезъ оба крана одновременно, что вполнѣ согласно съ условіемъ задачи.

§ 167. Задача II. — *Охотничья собака гонится за лисицею, которая уже успѣла сдѣлать 60 скачковъ. Она дѣлаетъ 9 скачковъ въ то время, какъ собака дѣлаетъ только 6, но за то 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы. Сколько скачковъ сдѣлаетъ собака, чтобы настичь лисицу?*

Назовемъ черезъ x число скачковъ, какое сдѣлаетъ собака, чтобы настичь лисицу. Такъ какъ 3 скачка собаки равны 7 скачкамъ лисицы, то x скачковъ собаки будутъ равны $\frac{7x}{3}$ скачкамъ лисицы: это будетъ пер-

вымъ выраженіемъ длины того пути, который должна пробѣжать собака, чтобы догнать лисицу (путь этотъ выраженъ въ лисьихъ скачкахъ).

Съ другой стороны, въ то время какъ собака дѣлаетъ 6 скачковъ, лисица дѣлаетъ 9; слѣдовательно, когда собака сдѣлаетъ x скачковъ, лисица сдѣлаетъ $\frac{9x}{6}$, а всего, вмѣстѣ съ прежними 60-ю скачками $60+\frac{9x}{6}$, что будетъ вторымъ выраженіемъ того же пути и въ тѣхъ же единицахъ (въ лисьихъ скачкахъ).

Поэтому мы можемъ написать уравненіе

$$\frac{7x}{3}=60+\frac{9x}{6},$$

откуда

$$x=72 \text{ скачкамъ}.$$

Испытаніе. 72 скачка собаки по величинѣ равны $\frac{7}{3}$ отъ 72, или 168 скачкамъ лисицы. Въ то время какъ собака сдѣлаетъ 72 скачка, лисица сдѣлаетъ 108; прибавивъ къ этимъ 108 скачкамъ 60 скачковъ, сдѣланныхъ ею раньше, мы получимъ сполна тѣ 168 лисьихъ скачковъ, въ которыхъ было выражено разстояніе, пробѣгаемое собакою.

§ 168. Задача III. — *Требуется найти такое четырехзначное число, чтобы* 1) *цифра сотенъ равнялась суммѣ цифръ единицъ и десятковъ, чтобы* 2) *цифра десятковъ равнялась удвоенной суммѣ цифръ тысячъ и единицъ, чтобы* 3) *при дѣленіи этого числа на сумму его цифръ въ частномъ получалось* 109 *и въ остаткѣ* 9, *и чтобы, наконецъ,* 4) *при вычитаніи искомаго числа изъ числа, составленнаго изъ тѣхъ же цифръ, но расположенныхъ въ обратномъ порядкѣ, въ разности получалось* 819

Назовемъ черезъ x, y, z и v соотвѣтственно цифры единицъ, десятковъ, сотенъ и тысячъ. Изъ перваго условія непосредственно вытекаетъ уравненіе

$$z=x+y, \qquad (1)$$

а изъ втораго — уравненіе

$$y=2v+2x. \qquad (2)$$

Такъ какъ величина искомаго числа есть $1000v+100z+10y+x$, то по 3-ему условію мы можемъ написать уравненіе

$$1000v+100z+10y+x=109(x+y+z+v)+9. \qquad (3)$$

Наконецъ, по 4-му условію

$$1000x+100y+10z+v-(1000v+100z+10y+x)=819. \qquad (4)$$

Прежде чѣмъ рѣшать эту систему четырехъ уравненій, упростимъ два послѣднихъ:

$$99v-z-11y-12x=1, \qquad (3)$$

$$111x+10y-10z-111v=91. \qquad (4)$$

Исключаемъ сначала z изъ уравненій (1), (3) и (4)

$$99v - 12y - 13x = 1, \qquad (5)$$

$$101x - 111v = 91. \qquad (6)$$

Далѣе, исключаемъ y изъ (2) и (5):

$$75v - 37x = 1 \qquad (7)$$

Наконецъ, исключаемъ x изъ (6) и (7)

$$v = 1.$$

Слѣдовательно,

$$x = 2,\ y = 6,\ z = 8$$

и искомое число есть 1862.

Испытаніе производится непосредственно.

§ 169. Нѣкоторыя условія задачи иногда являются лишними. Покажемъ это на примѣрѣ.

Задача IV.—*Отецъ раздѣлилъ наслѣдство между своими дѣтьми слѣдующимъ образомъ: старшій получаетъ сумму a и n-ую часть остатка, 2-й получаетъ сумму $2a$ и n-ую часть новаго остатка, 3-й получаетъ $3a$ и n-ую часть новаго остатка, и т. д. Оказалось, что наслѣдство раздѣлено было сполна и что всѣ дѣти получили поровну. Спрашивается, какъ велико было наслѣдство, сколько было дѣтей и что досталось каждому?*

Обозначимъ черезъ x величину наслѣдства. Часть перваго будетъ

$$a + \frac{x-a}{n}, \text{ или } \frac{x+(n-1)a}{n}.$$

На долю другихъ остается

$$x - \frac{x+(n-1)a}{n}, \text{ или } \frac{(n-1)(x-a)}{n}.$$

Второй получаетъ сначала $2a$. Послѣ этого остается

$$\frac{(n-1)(x-a)}{n} - 2a, \text{ или } \frac{(n-1)x-(3n-1)a}{n}.$$

Слѣдовательно, 2-му достанется

$$2a + \frac{(n-1)x-(3n-1)a}{n^2}, \text{ или } \frac{(n-1)x+(2n^2-3n+1)a}{n^2}.$$

А такъ какъ по условію части должны быть равны, то у насъ составляется уравненіе

$$\frac{x+(n-1)a}{n} = \frac{(n-1)x+(2n^2-3n+1)a}{n^2}.$$

откуда

$$x = (n-1)^2 a$$

Для отысканія величины наслѣдства мы воспользовались выраженіями только первыхъ двухъ частей; поэтому *необходимо*, вычисливъ эти части, показать, что онѣ равны остальнымъ, а также опредѣлить число дѣтей. Часть перваго будетъ

$$\frac{x + (n-1)a}{n}, \text{ или } \frac{(n-1)^2 a + (n-1)a}{n}, \text{ или } (n-1)a$$

Часть второго

$$\frac{(n-1)x + (2n^2 - 3n + 1)a}{n^2} = \frac{(n-1)^3 a + (2n^2 - 3n + 1)a}{n^2} =$$

$$= \frac{(n^3 - n^2)a}{n^2} = (n-1)a.$$

Часть третьяго по условію задачи

$$3a + \frac{x - 2(n-1)a - 3a}{n} = \frac{x + (n-1)a}{n} = (n-1)a$$

Также можно убѣдиться, что каждая и изъ остальныхъ частей равна $(n-1)a$.

Дѣля величину наслѣдства на часть каждаго изъ наслѣдниковъ, узнаемъ, сколько ихъ было.

$$\frac{(n-1)^2 a}{(n-1)a} = n - 1.$$

Итакъ, всѣ условія задачи выполнены.

§ 170. Введеніе вспомогательныхъ неизвѣстныхъ.—Если по условію задачи не легко найти зависимость между данными и искомыми величинами, то можно иногда ввести *вспомогательныя неизвѣстныя*, которыя потомъ исключаютъ изъ тѣхъ уравненій, куда онѣ входятъ. Приведемъ примѣръ изъ *Всеобщей Ариѳметики Ньютона*.

Задача V.—*На лугу, площадь котораго есть a, пасутся въ продолженіи t дней n быковъ и за это время съѣдаютъ какъ ту траву, что была раньше, такъ и ту, что подростала во все это время равномѣрно. На другомъ лугу, площадь котораго a', пасутся въ продолженіи t' дней n' быковъ и также съѣдаютъ какъ ту траву, что была раньше, такъ и ту, что подростала во все это время равномѣрно. Спрашивается, сколько нужно пустить быковъ на третій лугъ, площадь котораго есть α, чтобы они въ теченіе θ дней съѣли какъ ту траву, что на немъ есть, такъ и ту, которая будетъ подростать во все это время равномѣрно?*

Предполагается, что высота травы на всѣхъ трехъ лугахъ одинакова до выгона на нихъ быковъ; обозначаемъ ее черезъ y. Предпола-

гается также, что подростаніе травы на всѣхъ трехъ лугахъ за одинъ день одно и то же; обозначаемъ это подростаніе черезъ z. Величины y и z суть вспомогательныя неизвѣстныя. Обозначимъ, кромѣ того, черезъ x число быковъ, которыхъ нужно выпустить на третій лугъ.

Такъ какъ трава ежедневно подростаетъ на одну и ту же величину z, то подростаніе ея за t дней на первомъ лугу будетъ tz, и высота травы къ концу этого времени стала бы $y+tz$. Отсюда выводимъ, что все количество травы (объемъ ея), съѣденное n быками въ теченіи t дней, на этомъ лугу будетъ $a(y+tz)$. Слѣдовательно, одинъ быкъ въ теченіи одного дня съѣстъ травы

$$\frac{a(y+tz)}{nt}.$$

Очевидно, что количество травы, съѣденной однимъ быкомъ въ теченіи одного дня на 2-мъ и 3-мъ лугахъ выразится соотвѣтственно формулами

$$\frac{a'(y+t'z)}{n't'}, \quad \frac{\alpha(y+\theta z)}{x\theta}.$$

А такъ какъ эти количества должны быть между собою равны, то мы можемъ написать такія уравненія:

$$\frac{a(y+tz)}{nt}=\frac{a'(y+t'z)}{n't'}=\frac{\alpha(y+\theta z)}{\theta x}.$$

Сначала изъ перваго уравненія выражаемъ y какъ функцію отъ z:

$$y=\frac{(an'-a'n)tt'z}{a'nt-an't'}.$$

Затѣмъ, это значеніе y подставляемъ въ уравненіе

$$\frac{a(y+tz)}{nt}=\frac{\alpha(y+\theta z)}{\theta x};$$

при этомъ исчезнетъ и z, и мы окончательно получимъ

$$x=\frac{\alpha[an't'(\theta-t)+a'nt(t'-\theta)]}{aa'\theta(t'-t)}.$$

Ньютонъ прилагаетъ эту задачу къ слѣдующимъ числамъ:

$a=3\frac{1}{3}$ акра,	$t=4$ недѣли,	$n=12$ быковъ,
$a'=10$ „	$t'=9$ „	$n'=21$ „
$\alpha=24$ „	$\theta=18$ „	$x=36$. „

II. Изслѣдованіе

§ 171. Что значитъ изслѣдовать рѣшеніе.—Составивъ уравненія и рѣшивъ ихъ, мы получимъ рѣшеніе, удовлетворяющее уравненіямъ, если только оно не представлено подъ какимъ-нибудь неопредѣленнымъ видомъ, о чемъ мы будемъ говорить далѣе. Но рѣшеніе это не всегда можетъ удовлетворить предложенной задачѣ. Въ самомъ дѣлѣ, можетъ случиться, что нѣкоторыя условія, которымъ должны удовлетворять неизвѣстныя по самой природѣ вопроса, не могутъ быть выражены уравненіями и поэтому могутъ сдѣлать задачу невозможною. Изучить причины этой невозможности — и значитъ *изслѣдовать* рѣшеніе.

Когда данныя представлены буквами и когда, слѣдовательно, неизвѣстныя величины выражены формулами, можетъ случиться, что задача возможна только при нѣкоторыхъ значеніяхъ данныхъ, заключенныхъ въ извѣстныхъ предѣлахъ. Найти эти предѣлы, внѣ которыхъ задача невозможна, значитъ *изслѣдовать* рѣшеніе.

Наконецъ, изучить всѣ особенные случаи, какіе могутъ представить формулы въ предѣлахъ, найденныхъ при изслѣдованіи, также значитъ *изслѣдовать* рѣшеніе.

Приведемъ нѣсколько примѣровъ:

§ 172. Задача VI.—*Въ собраніи изъ 10 лицъ устроили подписку въ пользу бѣдныхъ: каждый мужчина далъ 6 франковъ, а каждая женщина 4 франка. Собранная сумма оказалась равною 45 франкамъ. Спрашивается, сколько было мужчинъ и сколько женщинъ?*

Обозначимъ черезъ x и y соотвѣтственно число мужчинъ и число женщинъ. Непосредственно составляемъ уравненіе

$$x + y = 10$$

Такъ какъ каждый мужчина далъ 6 фр., то x мужчинъ дали $6x$. Также, каждая женщина дала 4 фр., а y женщинъ дали $4y$. У насъ составляется другое уравненіе

$$6x + 4y = 45$$

Рѣшая эти уравненія, находимъ:

$$x = 2\frac{1}{2}, \quad y = 7\frac{1}{2}$$

Изслѣдованіе.—Полученное рѣшеніе *въ дробныхъ числахъ* есть единственное, удовлетворяющее уравненіямъ, вполнѣ точно выражающимъ

всѣ условія задачи. Слѣдовательно, задача не могла бы имѣть другого рѣшенія. *Самая же природа вопроса требуетъ, чтобы рѣшеніе состояло изъ цѣлыхъ чиселъ, а такъ какъ полученныя числа -дробныя, то задача— невозможна.*

§ 173. Задача VII.—*Нѣкто держалъ работника въ теченіи* 13 *лѣтнихъ дней и при разсчетѣ удержалъ изъ его жалованья* 22 *франка за убытки, причиненные ему работникомъ. Въ другой разъ онъ держалъ того же работника въ теченіи* 17 *зимнихъ дней и за каждый день платилъ 2-мя франками менѣе, чѣмъ за лѣтній; при разсчетѣ за усердіе онъ прибавилъ ему* 28 *франковъ. Оказалось, что въ оба раза работникъ получилъ одну и ту же сумму. Спрашивается, какова была цѣна лѣтняго дня?*

Обозначимъ черезъ x эту цѣну; $(x-2)$ выразитъ цѣну зимняго дня. Въ первый разъ работникъ получилъ $(13x-22)$, а во второй $17(x-2)+28$. У насъ составляется уравненіе

$$17(x-2)+28=13x-22$$

Рѣшая его, находимъ:

$$x=-4.$$

Изслѣдованіе. — Это *отрицательное* рѣшеніе удовлетворяетъ уравненію и есть единственное. Задача, всѣ условія которой вполнѣ точно выражаются этимъ уравненіемъ, не можетъ поэтому имѣть другого рѣшенія. *Самая же природа вопроса требуетъ, чтобы рѣшеніе было числомъ положительнымъ, а такъ какъ полученное число отрицательное, то задача невозможна.*

§ 174. Задача VIII.—*Найти такое двузначное число, чтобы учетверенное число единицъ было больше утроеннаго числа десятковъ на* 1 *и чтобы при вычитаніи изъ этого числа числа, составленнаго изъ тѣхъ же цифръ, но расположенныхъ въ обратномъ порядкѣ, получилось въ остаткѣ* 36.

Назовемъ черезъ x число десятковъ и черезъ y число единицъ. Уравненія, очевидно, будутъ:

$$4y-3x=1$$

$$10x+y-(10y+x)=36.$$

Рѣшая эту систему, находимъ:

$$x=17, \quad y=13.$$

Изслѣдованіе. — Это рѣшеніе въ *цѣлыхъ и положительныхъ числахъ* есть единственное, удовлетворяющее уравненіямъ. Слѣдовательно, задача другого рѣшенія имѣть не можетъ. *Самая природа вопроса требуетъ, чтобы оба искомыхъ числа были менѣе* 10; *полученныя же числа болѣе, и поэтому задача невозможна.*

На этихъ примѣрахъ мы видимъ, что рѣшеніе системы уравненій, составленныхъ по условіямъ задачи, можетъ не удовлетворять послѣдней, если въ немъ не выполнены тѣ условія, которымъ неизвѣстныя подчинены по самой природѣ вопроса, но которыя не были выражены въ уравненіяхъ. Это есть одна изъ точекъ зрѣнія, съ которой можно разсматривать изслѣдованіе задачъ. Есть и другая, гораздо болѣе важная, мы будемъ сейчасъ говорить объ *отрицательныхъ рѣшеніяхъ* и ихъ *истолкованіи*.

III. Отрицательныя рѣшенія задачъ первой степени съ одною неизвѣстною

§ 175. Отрицательныя рѣшенія уравненій.—Нѣтъ ничего особеннаго въ томъ, когда отрицательныя числа получаются, какъ рѣшеніе одного или нѣсколькихъ уравненій. Эти числа, будучи подставлены на мѣсто неизвѣстныхъ, дѣлаютъ первую часть каждаго уравненія равною второй; конечно, не слѣдуетъ забывать при этомъ соглашеній, введенныхъ нами ранѣе относительно отрицательныхъ чиселъ. Но если неизвѣстныя представляютъ собою искомыя величины, то отрицательныя рѣшенія, не выражая собою никакой величины, повидимому, должны быть разсматриваемы, какъ признакъ невозможности, и, слѣдовательно, должны быть отброшены какъ недопустимыя. Такъ на самомъ дѣлѣ и было бы, если бы при составленіи уравненій можно было всегда, посредствомъ какого-нибудь общаго метода и во всѣхъ случаяхъ, выразить условія предложенной задачи. Но во множествѣ случаевъ это не такъ и отрицательныя рѣшенія могутъ найти истолкованіе, которое важно изучить.

§ 176. Разсмотримъ сначала уравненіе съ одною неизвѣстною:

$$ax + b = a'x + b'. \tag{1}$$

Предположимъ, что, рѣшая его, мы получили для x отрицательное значеніе $-\alpha$; это показываетъ, что у насъ есть равенство

$$a(-\alpha) + b = a'(-\alpha) + b',$$

т. е.

$$b - a\alpha = b' - a'\alpha.$$

Слѣдовательно, $x = +\alpha$ есть рѣшеніе уравненія

$$b - ax = b' - a'x. \qquad (2)$$

Сравнивая уравненія (1) и (2), мы видимъ, что они различаются только знакомъ при членахъ, содержащихъ неизвѣстную. Поэтому мы можемъ высказать такую теорему:

Теорема.—*Всякое отрицательное рѣшеніе уравненія первой степени съ одною неизвѣстною, будучи взято положительно, удовлетворяетъ новому уравненію, которое получается изъ даннаго посредствомъ перемѣны знака при членахъ, содержащихъ неизвѣстную.*

177. Замѣчаніе. — Часто случается, какъ мы это сейчасъ и увидимъ, что это новое уравненіе соотвѣтствуетъ задачѣ, мало отличающейся отъ предложенной, и даже иногда соотвѣтствуетъ ей самой, но понятой въ болѣе общемъ смыслѣ; *въ такомъ случаѣ мы получаемъ рѣшеніе преобразованной или обобщенной задачи, и это рѣшеніе есть отрицательное значеніе, найденное для неизвѣстной первоначальнаго уравненія, но взятое положительно.*

Подобное замѣчаніе не можетъ быть развито въ общемъ видѣ; слѣдуетъ въ каждомъ отдѣльномъ вопросѣ изслѣдовать, какъ прилагается это замѣчаніе. Покажемъ это на слѣдующихъ задачахъ.

§ 178. Задача IX. — *Два тѣла M и N начали двигаться одновременно по прямой линіи изъ точекъ A и B, расположенныхъ одна отъ другой на разстояніи d (A — влѣво, B — вправо); тѣла движутся въ одномъ направленіи, слѣва направо, со скоростями v и v' Сколько пройдетъ времени до ихъ встрѣчи?*

Назовемъ черезъ x искомое время; первое тѣло, скорость котораго есть v, пройдетъ разстояніе v въ единицу времени и, слѣдовательно, vx въ теченіи времени x; второе тѣло въ то же время пройдетъ разстояніе $v'x$. Такъ какъ они отправились одновременно, то для ихъ встрѣчи необходимо, чтобы первое изъ нихъ прошло разстояніе на d болѣе, чѣмъ второе. Слѣдовательно, у насъ будетъ уравненіе

$$vx - v'x = d, \qquad (1)$$

откуда

$$x = \frac{d}{v - v'}.$$

Изслѣдованіе. — Если v болѣе v', то это значеніе для x будетъ положительное и дастъ требуемое рѣшеніе. Но если v меньше v', то это рѣшеніе будетъ отрицательнымъ. Чтобы истолковать его значеніе, замѣтимъ,

что оно, будучи взято положительно, удовлетворитъ по теоремѣ § 176-го уравненію

$$v'x - vx = d. \tag{2}$$

Но это уравненіе, очевидно, выражаетъ, что путь, проходимый тѣломъ N, болѣе пути, проходимаго тѣломъ M, на разстояніе d; это условіе соотвѣтствуетъ слѣдующему вопросу:

Предполагая, что оба тѣла начали свое движеніе неопредѣленно давно, спрашивается, сколько прошло времени съ момента ихъ встрѣчи? При такомъ предположеніи точка ихъ встрѣчи лежитъ влѣво отъ A.

Итакъ, если придать задачѣ такое распространенное толкованіе, то *отрицательное значеніе x выразитъ уже протекшее время*.

Впрочемъ, очевидно, что при $v < v'$ тѣло M, находящееся позади N и движущееся съ меньшею скоростью, не можетъ встрѣтиться съ N при дальнѣйшемъ движеніи, а должно было встрѣтиться съ нимъ раньше своего прохожденія черезъ точку A.

§ 178. Задача X. — *Возрасты двухъ лицъ суть a и b, черезъ сколько времени первое изъ нихъ будетъ вдвое старше 2-го?*

Назовемъ искомое время черезъ x; уравненіе, очевидно, будетъ

$$a + x = 2(b + x) \tag{1}$$

откуда

$$x = a - 2b.$$

Изслѣдованіе. — Если a болѣе $2b$, то найденное значеніе будетъ положительное и дастъ требуемое рѣшеніе. Но если a менѣе $2b$, то это рѣшеніе станетъ отрицательнымъ; будучи взято положительно, оно удовлетворитъ тогда (§ 176) уравненію

$$a - x = 2(b - x), \tag{2}$$

что, очевидно, соотвѣтствуетъ слѣдующему вопросу:

Сколько времени тому назадъ первое лицо было вдвое старше 2-го?

Если принять такое распространенное толкованіе, то *отрицательное значеніе x выразитъ уже протекшее время.*

Замѣтимъ, что отношеніе возрастовъ въ настоящій моментъ есть $\frac{a}{b}$; если оно болѣе 2 (если $a > 2b$), то, уменьшаясь съ теченіемъ времени, оно дойдетъ до значенія, равнаго 2: случай положительнаго рѣшенія. Наоборотъ, если это отношеніе въ настоящій моментъ менѣе 2 (если $a < 2b$), то, приближаясь съ теченіемъ времени къ 1, оно никогда не можетъ стать въ будущемъ равнымъ 2: слѣдовательно, въ этомъ смыслѣ рѣшенія мы не получимъ. Но если при этомъ a болѣе b, то былъ уже моментъ, когда отношеніе возрастовъ равнялось 2; этотъ моментъ опредѣляетъ отрицательное рѣшеніе.

Прибавимъ еще, что если a меньше b, то задача, очевидно, не имѣетъ рѣшенія; и, на самомъ дѣлѣ, мы видимъ, что формула $x = 2b - a$, относящаяся къ этому случаю, даетъ для x значеніе большее, чѣмъ b, что невозможно.

§ 180. Задача XI. — *На прямой даны двѣ точки A и B. Первая находится влѣво отъ точки O на разстояніи a, а вторая вправо отъ той же точки на разстояніи b. Найти на этой прямой третью точку X такую, что если взять середину M отрѣзка BX, а потомъ пройти отъ точки A треть отрѣзка AM, то попадемъ въ точку O.*

A O X M B

Предположимъ, что искомая точка X помѣщается вправо отъ точки O. Назовемъ черезъ x разстояніе OX, которое мы и принимаемъ за неизвѣстную. Изъ чертежа очевидно, что

$$\begin{cases} b = OM + MB, \\ x = OM - MX \end{cases}$$

и что $MB = MX$. Поэтому можно написать:

$$OM = \frac{b+x}{2};$$

слѣдовательно,

$$AM = a + \frac{b+x}{2}.$$

А такъ какъ по условію задачи $AM = 3\ AO = 3a$, то у насъ составляется уравненіе

$$3a = a + \frac{b+x}{2}, \qquad (1)$$

откуда

$$x = 4a - b.$$

Изслѣдованіе. — Если b меньше $4a$, то найденное значеніе для x положительно и, слѣдовательно, представляетъ требуемое рѣшеніе. Но если $4a$ меньше b, рѣшеніе отрицательно; будучи же взято положительно, оно удовлетворитъ (§ 176) уравненію

$$3a = a + \frac{b-x}{2}. \qquad (2)$$

Такое уравненіе придется составить въ томъ случаѣ, если точка X будетъ находиться влѣво отъ точки O на разстояніи x. На чертежѣ тогда выйдетъ, что

$$b = OM + MB;$$

$$x = MX - OM,$$

откуда

$$OM = \frac{b-x}{2} \quad \text{и} \quad AM = a + \frac{b-x}{2};$$

слѣдовательно,

$$3a = a + \frac{b}{2}x. \qquad (2)$$

Отсюда заключаемъ, что *отрицательное значеніе x, полученное изъ уравненія* (1), *въ этомъ случаѣ должно быть отсчитано въ направленіи, противоположномъ тому, какое мы допустили при составленіи уравненія.*

§ 181. Замѣчаніе.—Не слѣдуетъ думать, что всѣ отрицательныя рѣшенія истолковываются такъ же естественно, какъ предыдущія. Также нельзя обобщать, что *отрицательное значеніе, найденное для будущаго времени, выразитъ время прошедшее*, или что *отрицательныя длины, отсчитанныя на какой-нибудь линіи отъ неподвижной точки, должны всегда идти въ направленіи, обратномъ тому, которое соотвѣтствуетъ положительнымъ значеніямъ*. Однако, такъ бываетъ въ большинствѣ случаевъ, и мы сейчасъ укажемъ причины этого.

§ 182. Почему отрицательныя значенія времени должны показывать прошедшее время.—Предположимъ, что мы составили для нѣкоторой задачи уравненіе

$$B + Ax = B' + A'x, \qquad (1)$$

гдѣ x обозначаетъ время, которое должно пройти съ настоящаго момента до нѣкотораго событія.—Если бы мы отнесли начало для отсчитыванія времени за t лѣтъ назадъ, а за неизвѣстную приняли бы дату событія, то, называя черезъ x_1 эту послѣднюю, мы, очевидно, имѣли бы:

$$x_1 = t + x, \quad \text{откуда} \quad x = x_1 - t.$$

Уравненіе (1) въ такомъ случаѣ приняло бы слѣдующій видъ:

$$B + A(x_1 - t) = B' + A'(x_1 - t), \qquad (2)$$

что и было бы уравненіемъ задачи, при чемъ x_1 обозначало бы неизвѣстную.

Предположимъ, что значеніе для x_1 вышло бы положительнымъ, но меньшимъ, чѣмъ t, напр., вышло бы равнымъ $(t - \alpha)$. Подставивъ это значеніе въ уравненіе (2), получимъ равенство:

$$B - A\alpha = B' - A'\alpha,$$

откуда заключаемъ, что уравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе $x = -\alpha$.

Итакъ, отрицательное рѣшеніе, $x = -\alpha$, найденное для уравненія (1), *обозначаетъ, что событіе случилось спустя* $(t-\alpha)$ *лѣтъ съ эпохи, предшествовавшей настоящему моменту на* t *лѣтъ, иначе говоря, событіе случилось за* α *лѣтъ до настоящаго момента.*

§ 183. Замѣчаніе.—Уравненіе (1) составлено при томъ предположеніи, что значенія для x положительны; слѣдовательно, уравненіе (2) составлено для значеній x_1 большихъ, чѣмъ t, иначе говоря, для эпохъ болѣе позднихъ, чѣмъ настоящій моментъ. Прилагая это послѣднее уравненіе, какъ мы только что и сдѣлали, къ предшествующей эпохѣ, мы могли бы придти къ невозможному результату. Итакъ, предыдущее разсужденіе не вполнѣ общаго характера.

§ 184. Почему отрицательныя значенія для разстояній слѣдуетъ отсчитывать въ направленіи, противоположномъ тому, въ какомъ принято отсчитывать положительныя. — Предположимъ теперь, что мы составили для нѣкоторой задачи уравненіе

$$B + Ax = B' + A'x, \tag{1}$$

гдѣ x обозначаетъ разстояніе, отсчитанное по линіи отъ нѣкоторой данной точки O въ извѣстномъ направленіи, напр., вправо — Если бы мы измѣнили начало разстояній O на другое O', находящееся влѣво отъ перваго на разстояніи d отъ него, и искомое разстояніе назвали бы черезъ x_1, то мы, очевидно, имѣли бы,

$$x_1 = d + x, \quad \text{или} \quad x = x_1 - d.$$

Тогда вмѣсто уравненія (1) мы имѣли бы слѣдующее уравненіе задачи.

$$B + A(x_1 - d) = B' + A'(x_1 - d). \tag{2}$$

Предположимъ, что это уравненіе дало бы для x_1 положительное значеніе, но меньшее, чѣмъ d, напр., $(d - \alpha)$; чтобы опредѣлить положеніе искомой точки X, слѣдовало бы сначала отложить разстояніе d отъ O' по направленію къ O, а затѣмъ въ противоположномъ направленіи отъ O до искомой точки X разстояніе α. Итакъ, искомая точка будетъ находиться влѣво отъ точки O, на разстояніи α отъ этого начала Подставивъ же въ уравненіе (2) вмѣсто x_1 его значеніе $(d-\alpha)$, получимъ:

$$B - A\alpha = B' - A'\alpha.$$

Отсюда заключаемъ, что уравненіе (1) имѣетъ рѣшеніе $x = -a$.

Итакъ, отрицательное рѣшеніе, $x = -a$, *найденное для уравненія* (1), *обозначаетъ, что искомая точка находится влѣво отъ точки* O, *на разстояніи* a *отъ этого начала.*

§ 185. Замѣчаніе. — Какъ и въ **§ 183**-мъ слѣдуетъ замѣтить, что предыдущее разсужденіе не вполнѣ общаго характера; предполагается, что уравненіе (2), составленное для точекъ, лежащихъ вправо отъ точки O, такъ какъ оно есть слѣдствіе уравненія (1), прилагается также и къ точкамъ, лежащимъ влѣво. Но это не всегда справедливо, что мы сейчасъ и покажемъ на примѣрѣ.

§ 186. Задача XII. — *За перевозку товара желѣзная дорога беретъ* 0фр.,10. *за тонну и за километръ, кромѣ того взимается* 3фр.,75 *за вагонъ въ* 2000 *килограммовъ, независимо отъ разстоянія. На какое разстояніе перевезены* 50 *тоннъ, если издержки составили* 3 *франка?*

Обозначимъ искомое разстояніе черезъ x; 50 тоннъ составятъ 25 вагоновъ, слѣдовательно, независимо отъ разстоянія придется уплатить

$$3,75 \times 25.$$

Сверхъ того, за провозъ на разстояніе x будетъ взято по условію задачи

$$0,10 \times 50 \times x.$$

Уравненіе для нашей задачи будетъ

$$3,75 \times 25 + (0,10 \times 50 \times x) = 3, \qquad (1)$$

откуда

$$x = -18,15.$$

Изслѣдованіе. — Это отрицательное рѣшеніе здѣсь рѣшительно ничего не обозначаетъ, такъ какъ стоимость перевоза 50 тоннъ на 18клм.,15, *вправо или влѣво* отъ начальнаго пункта, совершенно одна и та же; слѣдовательно, еслибы искомая точка находилась влѣво на 18клм.,15, на что, повидимому, указываетъ отрицательное рѣшеніе то существовала бы и другая точка, находящаяся вправо на такомъ же разстояніи; уравненіе, составленное для этого случая, дало бы рѣшеніе $x = +18,15$. Можно, впрочемъ, сказать *a priori*, что задача невозможна, потому что сумма, уплачиваемая независимо отъ разстоянія, въ размѣрѣ 3фр.,75 × 25, уже превышаетъ всю ту сумму, какая дана на всѣ издержки.

Можно убѣдиться, что въ этомъ случаѣ разсужденіе **§ 184**-го ошибочно. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ, что, прежде чѣмъ отправить 50 тоннъ направо, выбираютъ за начало точку O, расположенную влѣво отъ пункта отправленія на разстояніи d; разстояніе x_1 искомой точки отъ этого начала будетъ $(x + d)$, откуда $x = x_1 - d$. Тогда уравненіе задачи приметъ видъ:

$$3,75 \times 25 + 0,10 \times 50 \times (x_1 - d) = 3 \qquad (2)$$

Если бы это уравненіе, будучи выведено изъ уравненія (1) и потому имѣющее значеніе для точекъ, лежащихъ вправо отъ пункта отправленія, было бы приложимо и къ точкамъ, расположеннымъ влѣво, то разсужденіе **§ 184**-го имѣло бы мѣсто и x_1, положительное, но меньшее, чѣмъ d, соотвѣтствовало бы дѣйствительно точкѣ, находящейся влѣво. Но уравненіе (2) никоимъ образомъ не подходитъ къ случаю перевозки влѣво; въ самомъ дѣлѣ, тогда пройденный путь выразится черезъ $d-x_1$ и уравненіе задачи должно быть

$$3{,}75 \times 25 + 0{,}10 \times 50 \times (d - x_1) = 3 \qquad (3)$$

и, слѣдовательно, отличается отъ уравненія (2).

IV. Введеніе отрицательныхъ чиселъ въ условіе задачи

§ 187. Преимущества этого введенія. — Иногда бываетъ выгодно ввести отрицательныя числа въ самое даже заданіе задачи. Чтобы показать, какъ ихъ можно ввести туда и какая происходитъ отъ этого выгода, разсмотримъ снова задачу **§ 178**-го.

Два тѣла M и M' движутся по прямой AA' въ одномъ и томъ же направленіи AA', при чемъ оба отправились одновременно: M изъ A со скоростью v, а M' изъ A' со скоростью v'. Когда они встрѣтятся?

Называя черезъ x искомое время и черезъ d разстояніе AA', составляемъ уравненіе (**§ 178**)

$$vx - v'x = d.$$

Мы видѣли, что это уравненіе даетъ рѣшеніе задачи даже тогда, когда v меньше v', если разсматривать отрицательное значеніе x, какъ время уже протекшее.

Для большаго обобщенія предположимъ, что оба тѣла движутся не въ одномъ и томъ же направленіи AA'. Тогда намъ представится три различныхъ случая.

1. Тѣло M движется вправо, а M' — влѣво;

A ——————— A'

они встрѣтятся между A и A', при чемъ одно изъ нихъ пробѣжитъ разстояніе vx, а другое $v'x$, и уравненіе задачи приметъ такой видъ:

$$vx + v'x = d.$$

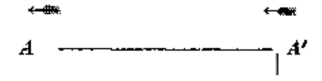
2. Тѣло M движется влѣво, а M' — вправо:



они никогда не встрѣтятся. Но называя черезъ x протекшее время съ момента ихъ встрѣчи между A и A' и замѣчая, что одно изъ нихъ пробѣжало разстояніе vx, а другое $v'x$ до прибытія соотвѣтственно въ точки A и A', мы можемъ написать:

$$vx + v'x = d.$$

3. Наконецъ, пусть оба тѣла движутся влѣво;



они встрѣтятся влѣво отъ A и уравненіе задачи приметъ видъ:

$$v'x - vx = d.$$

Итакъ, уравненія, соотвѣтствующія всѣмъ четыремъ случаямъ, будутъ слѣдующія:

$vx - v'x = d$, когда M и M' движутся вправо;

$vx + v'x = d$, когда M движется вправо, а M' — влѣво,

$vx + v'x = d$, когда M движется влѣво, а M' — вправо, при чемъ x обозначаетъ уже протекшее время;

$v'x - vx = d$, когда M и M' движутся влѣво.

Эти четыре уравненія могутъ быть сведены къ одному, что гораздо удобнѣе, если согласиться обозначать отрицательными числами, $(-v)$ и $(-v')$, скорости, направленныя влѣво. Въ самомъ дѣлѣ, тогда придется замѣнить во 2-мъ изъ вышенаписанныхъ уравненій v' на $(-v')$, въ 3-емъ v на $(-v)$ и въ 4-мъ v на $(-v)$, а v' на $(-v')$. Кромѣ того, въ 3-емъ уравненіи, гдѣ неизвѣстная обозначаетъ протекшее время, слѣдуетъ замѣнить x на $(-x)$.

Послѣ этихъ замѣнъ всѣ уравненія примутъ одинъ видъ

$$vx - v'x = d,$$

и формула

$$x = \frac{d}{v - v'},$$

выводимая отсюда, также будетъ одна для всѣхъ случаевъ

Итакъ, выгода введенія отрицательныхъ чиселъ въ данныя задачи состоитъ въ томъ, что всѣ уравненія, соотвѣтствующія различнымъ ея случаямъ, сводятся къ одному и, слѣдовательно, рѣшенія этихъ уравненій выразятся также одною формулою.

V. Отрицательныя рѣшенія задачъ первой степени съ двумя неизвѣстными

§ 188. До сихъ поръ мы разсматривали отрицательныя рѣшенія одного уравненія съ одною неизвѣстною. Въ случаѣ нѣсколькихъ уравненій разсужденія останутся тѣ же. Предположимъ, что при рѣшеніи системы

$$\left.\begin{array}{l} ax+by=c, \\ a'x+b'y=c' \end{array}\right\} \quad (1)$$

мы нашли для одной, или для обѣихъ неизвѣстныхъ отрицательныя значенія, напр., $x=\alpha$, $y=-\beta$. Эти значенія, удовлетворяя уравненіямъ (1), дадутъ тождества:

$$\left.\begin{array}{l} a\alpha-b\beta=c, \\ a'\alpha-b'\beta=c'; \end{array}\right\} \quad (2)$$

отсюда заключаемъ, что значенія $x=\alpha$, $y=\beta$ удовлетворятъ системѣ:

$$\left.\begin{array}{l} ax-by=c, \\ a'x-b'y=c'. \end{array}\right\} \quad (3)$$

Итакъ, замѣняя отрицательное рѣшеніе $y=-\beta$ соотвѣтственнымъ положительнымъ, мы придемъ къ другой системѣ уравненій, которая получится изъ первой посредствомъ перемѣны знака у членовъ съ y. Совершенно также, отрицательное рѣшеніе для x можно измѣнить на положительное, измѣнивъ въ предложенныхъ уравненіяхъ знаки у всѣхъ членовъ съ x.

Теорема.—*Вообще, при рѣшеніи системы уравненій полученныя значенія для неизвѣстныхъ всѣ можно взять со знакомъ $+$, даже если нѣкоторыя изъ нихъ выйдутъ и отрицательными; такія положительныя значенія будутъ въ этомъ случаѣ рѣшеніями новой системы, получаемой изъ прежней посредствомъ перемѣны знака у членовъ, содержащихъ тѣ неизвѣстныя, для которыхъ раньше значенія выходили отрицательными.*

§ 189. Замѣчаніе.—Новыя уравненія, которымъ удовлетворяютъ прежнія отрицательныя значенія неизвѣстныхъ, взятыя теперь положительно, соотвѣтствуютъ иногда задачѣ или немного отличающейся отъ прежней, или той же самой, но понимаемой въ болѣе

общемъ смыслѣ. Въ этомъ случаѣ рѣшеніе измѣненной или обобщенной задачи мы получимъ, взявъ со знакомъ + прежнія отрицательныя значенія для неизвѣстныхъ. Однако, это замѣчаніе, какъ и въ уравненіяхъ съ одною неизвѣстною, не можетъ быть развито вообще, а только на отдѣльныхъ примѣрахъ

Разсмотримъ, напр., слѣдующую задачу.

§ 190. Задача XIII. — *Резервуаръ, вмѣстимость котораго равна v, наполнился въ теченіи времени t частью посредствомъ n крановъ, черезъ каждый изъ которыхъ влилось одно и то же количество воды, частью отъ дождя, падавшаго равномѣрно на поверхность резервуара, равную s. Другой резервуаръ, вмѣстимость котораго v', наполнился въ теченіи времени t' также частью посредствомъ n' такихъ же крановъ, частію отъ дождя, падавшаго равномѣрно и съ такою же силою на его поверхность, равную s'. Найти количество x воды, влившейся черезъ каждый кранъ въ единицу времени, и количество y дождя, выпавшаго въ единицу времени на единицу поверхности резервуара.*

Такъ какъ черезъ одинъ кранъ въ единицу времени влилось количество воды, равное x, то черезъ n крановъ въ теченіи времени t влилось nxt. Дождя выпало на единицу поверхности въ единицу времени количество, равное y, а въ t времени на поверхность s — количество, равное syt. Отсюда составляемъ уравненіе

$$nxt + syt = v. \qquad (1)$$

Для второго резервуара составимъ подобное же уравненіе

$$n'xt' + s'yt' = v'. \qquad (2)$$

Рѣшая эти уравненія, найдемъ x и y

Предположимъ теперь, что при рѣшеніи этихъ уравненій x вышло положительнымъ, а y — отрицательнымъ, напр., $x = \alpha$, $y = -\beta$. По **§ 188**-му значенія $x = \alpha$, $y = \beta$ будутъ удовлетворять уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} nxt - syt &= v, \\ n'xt' - s'yt' &= v', \end{aligned}\right\}$$

которыя, въ свою очередь, соотвѣтствуютъ (**§ 189**) задачѣ, отличающейся отъ предложенной тѣмъ, что дождь, *наполняющій* резервуары, замѣненъ въ ней другою причиною, *опоражнивающею* резервуары пропорціонально времени и поверхности, напр., испареніемъ.

Если бы, наоборотъ, вышло x отрицательнымъ, то это значеніе, взятое положительно, удовлетворило бы уравненіямъ

$$\left.\begin{aligned} syt - nxt &= v, \\ s'yt' - n'xt' &= v', \end{aligned}\right\}$$

которыя, въ свою очередь, соотвѣтствуютъ задачѣ, отличающейся отъ предложенной тѣмъ, что краны, *наполняющіе* резервуары, замѣнены въ ней такимъ же числомъ причинъ, *опоражнивающихъ* резервуары, напр., отверстіями или насосами, выкачивающими количество x воды въ единицу времени.

§ 191. Замѣчанія.—Замѣчанія относительно отрицательныхъ значеній для времени или для длины, приведенныя въ **§§ 182** и **184**, прилагаются безъ измѣненія и къ тому случаю, когда уравненія содержатъ болѣе одной неизвѣстной.

Замѣтимъ, что, кромѣ длинъ и временъ, есть и другія величины, которыя могутъ быть разсматриваемы также въ двухъ противоположныхъ смыслахъ. Къ нимъ можно отнести температуры, отсчитываемыя вверхъ и внизъ отъ нуля, сѣверныя и южныя широты (какъ географическія, такъ и небесныя), притягательныя и отталкивательныя силы, активъ и пассивъ коммерсанта. Всѣ эти величины весьма удобно изображаются положительными или отрицательными числами.

Замѣтимъ, наконецъ, что нѣтъ необходимости вводить отрицательныя числа въ изложеніе задачъ; мы въ правѣ принять или не принять такое введеніе отрицательныхъ чиселъ. Но *если желательно обобщить формулы, иначе говоря, сдѣлать такъ, чтобы рѣшеніе задачи во всѣхъ случаяхъ было выражено только одною формулою, то такое введеніе отрицательныхъ чиселъ станетъ необходимымъ: придется измѣненіе смысла задачи выражать посредствомъ измѣненія знака.*

VI. Безконечныя и неопредѣленныя рѣшенія

§ 192. Рѣшенія, называемыя безконечными.—Если формула, выражающая общее рѣшеніе задачи, будетъ дробнаго вида, то при нѣкоторыхъ предположеніяхъ относительно буквъ, входящихъ въ эту формулу, можетъ случиться, что знаменатель обратится въ нуль, а числитель не обратится. Тогда формула приметъ видъ $x = \frac{k}{0}$. Далѣе мы увидимъ (Глава VII), при общемъ изслѣдованіи формулъ, что уравненіе въ этомъ случаѣ невозможно. Не всегда это можно сказать о задачѣ, приведшей къ такому рѣшенію; можно лишь утверждать, что количество, принятое за неизвѣстную, въ этомъ случѣ не существуетъ. Разсмотримъ для примѣра слѣдующую задачу.

§ 193. Задача XIV.—*Два круга радиусовъ R и r расположены въ одной плоскости и притомъ такъ, что одинъ не внутри другого; разстояніе между ихъ центрами равно d. Найти точку, въ которой общая внѣшняя касательная встрѣчаетъ прямую, соединяющую центры.*

Обозначимъ черезъ x разстояніе искомой точки отъ центра меньшаго круга. Соединяя каждый центръ съ соотвѣтствующею точкою касанія, образуемъ два подобныхъ треугольника, изъ которыхъ непосредственно вытекаетъ пропорція

(1) $\frac{d+x}{x} = \frac{R}{r}$, откуда $x = \frac{dr}{\text{[redacted]} - r}$. (2)

Изслѣдованіе. — Пока r менѣе R, до тѣхъ поръ x положительно, и формула даетъ возможность построить искомую точку. Если же значеніе r станетъ приближаться къ значенію R, то x станетъ возрастать, потому что числитель его возрастаетъ, а знаменатель убываетъ; слѣдовательно, искомая точка удаляется по линіи центровъ. А такъ какъ разность $(R-r)$ можно сдѣлать достаточно малою, чтобы дробь (2) стала какъугодно большою, то и радіусы круговъ могутъ отличаться на достаточно малую величину, чтобы точка, въ свою очередь, удалилась какъугодно далеко. Наконецъ, въ предѣлѣ, когда $r = R$, дробь превзойдетъ всякую напередъ заданную величину, какъ бы велика она ни была. *Слѣдовательно, точка встрѣчи удаляется безпредѣльно, и двѣ прямыя, не встрѣчаясь болѣе, становятся параллельными.* Очевидно, что въ этомъ случаѣ уравненіе (1) принимаетъ невозможный видъ: $\frac{d+x}{x} = 1$, а формула — особенный: $x = \frac{dr}{0}$; нѣтъ болѣе ни уравненія, ни формулы, и точка встрѣчи не существуетъ. Но, именно, этотъ результатъ и составляетъ рѣшеніе задачи.

§ 194. Замѣчаніе.—Когда знаменатель дроби уменьшается, дробь увеличивается, и притомъ безпредѣльно, если знаменатель уменьшается безпредѣльно. Поэтому иногда говорятъ, что при знаменателѣ, равномъ нулю, дробь обращается въ *безконечность* и пишутъ: $x = \infty$. Это выраженіе, строго говоря, неправильно, такъ какъ *дробь, знаменатель которой равенъ нулю, ничего не представляетъ.* Если данныя задачи измѣняются такимъ образомъ, что знаменатель выраженія для неизвѣстной стремится къ нулю, то сама неизвѣстная увеличивается безпредѣльно; но какъ только знаменатель обращается въ нуль, рѣшенія нѣтъ и уравненіе невозможно.

§ 195. Неопредѣленныя рѣшенія.—Если формула, выражающая рѣшеніе задачи, будетъ дробнаго вида, то иногда и такъ можетъ случиться, что при нѣкоторыхъ частныхъ значеніяхъ буквъ, входящихъ въ эту формулу, обратятся заразъ въ 0 какъ числитель,

такъ и знаменатель. Формула въ этомъ случаѣ приметъ видъ: $x = \frac{0}{0}$. Далѣе (Глава VII) мы увидимъ, что система, дающая такой результатъ, вообще, *неопредѣленная*; однако, неопредѣленность эта можетъ быть только кажущейся.

Приведемъ два примѣра для этихъ двухъ случаевъ.

§ 196. Задача XV.—*Даны два слитка: первый содержитъ a граммовъ золота и b граммовъ серебра, второй содержитъ a' граммовъ золота и b' граммовъ серебра. Сколько нужно взять отъ каждаго изъ этихъ двухъ слитковъ, чтобы образовать такой третій, въ которомъ было бы α граммовъ золота и β граммовъ серебра?*

Обозначимъ черезъ x и y вѣса тѣхъ кусковъ, какіе нужно взять отъ перваго и второго слитковъ. Такъ какъ въ вѣсѣ $a+b$ содержится a граммовъ золота и b граммовъ серебра, то въ вѣсѣ x того же слитка будетъ содержаться $\frac{ax}{a+b}$ золота и $\frac{bx}{a+b}$ серебра.—Точно такъ же, въ вѣсѣ y второго слитка, весь вѣсъ котораго $a'+b'$, будетъ $\frac{a'y}{a'+b'}$ золота и $\frac{b'y}{a'+b'}$ серебра.

Отсюда мы пишемъ два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{ax}{a+b} + \frac{a'y}{a'+b'} &= \alpha, \\ \frac{bx}{a+b} + \frac{b'y}{a'+b'} &= \beta \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Рѣшая эту систему, находимъ.

$$x = \frac{(a+b)(\alpha b' - \beta a')}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{(a'+b')(a\beta - b\alpha)}{ab' - ba'}$$

Изслѣдованіе.—Если предположить, что $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{\alpha}{\beta}$, то числители и знаменатели въ обѣихъ формулахъ обратятся въ нули, и мы будемъ имѣть:

$$x = \frac{0}{0}, \qquad y = \frac{0}{0}.$$

Чтобы истолковать этотъ результатъ, замѣтимъ, что изъ нашего предположенія вытекаютъ такія слѣдствія:

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{a+b} &= \frac{a'}{a'+b'} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \\ \frac{b}{a+b} &= \frac{b'}{a'+b'} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и что если замѣнить въ уравненіяхъ (1) коэффиціенты при неизвѣстныхъ ихъ значеніями, $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, получаемыми изъ отношеній (2), то оба заданныхъ уравненія приведутся къ одному:

$$x + y = \alpha + \beta. \qquad (3)$$

Отсюда вытекаетъ (§ 163), что система (1) — неопредѣленная. Но и *сама задача—неопредѣленная* и имѣетъ безчисленное множество рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, по нашему предположенію отношеніе золота къ серебру одно и то же во всѣхъ трехъ слиткахъ; слѣдовательно, сколько бы мы ни взяли отъ каждаго изъ двухъ слитковъ, мы, очевидно, получимъ новый сплавъ съ тѣмъ же отношеніемъ золота къ серебру. Взятыя количества должны лишь удовлетворять уравненію (3).

§ 197. Задача XVI. — *Вычислить площадь трапеціи съ основаніями B и b и высотою h, разсматривая ее, какъ разность между площадями двухъ треугольниковъ, которые образуются при продолженіи непараллельныхъ сторонъ трапеціи до взаимнаго пересѣченія.*

Обозначимъ черезъ x искомую площадь и примемъ за вспомогательныя неизвѣстныя высоты y и z обоихъ треугольниковъ. Площади послѣднихъ выразятся черезъ $\frac{1}{2}By$ и $\frac{1}{2}bz$, и первое уравненіе будетъ:

$$x = \frac{1}{2}(By - bz). \qquad (1)$$

Такъ какъ эти треугольники подобны, то основанія пропорціональны высотамъ и у насъ составится второе уравненіе

$$\frac{y}{z} = \frac{B}{b}. \qquad (2)$$

Наконецъ, такъ какъ высота h есть разность высотъ y и z, то мы будемъ имѣть и третье уравненіе

$$y - z = h. \qquad (3)$$

Для исключенія вспомогательныхъ неизвѣстныхъ выводимъ изъ уравненія (2):

$$\frac{y-z}{y} = \frac{B-b}{B}, \quad \frac{y-z}{z} = \frac{B-b}{b},$$

откуда, въ силу уравненія (3),

$$y = \frac{Bh}{B-b}, \quad z = \frac{bh}{B-b}.$$

Подставляя эти значенія въ уравненіе (1), получимъ, наконецъ, что

$$x = \frac{h}{2}\cdot\frac{B^2-b^2}{B-b}. \qquad (4)$$

Изслѣдованіе. — Пока b не равно B, эта формула для площади трапеціи даетъ вполнѣ опредѣленное значеніе. Но если $b = B$, то формула принимаетъ видъ: $x = \frac{0}{0}$, и задача является неопредѣленною. Однако, *эта неопредѣленность только кажущаяся.* Въ этомъ случаѣ трапеція превращается въ параллелограммъ, площадь котораго равна Bh: это выраженіе мы можемъ получить и изъ нашей дроби, сокративъ предварительно числителя и знаменателя на ихъ общаго множителя $(B - b)$ и затѣмъ положивъ $B = b$:

$$x = \frac{h}{2}(B + b) \text{ (извѣстная формула для площади трапеціи);}$$

$$x = Bh \qquad \text{(при } B = b\text{).}$$

§ 198. Замѣчаніе. — Изъ предыдущаго видно, что если формула, выражающая рѣшеніе задачи, въ силу частныхъ предположеній, принимаетъ неопредѣленный видъ $\frac{0}{0}$, то не слѣдуетъ спѣшить съ заключеніемъ, что и самая задача—неопредѣленная. Полученная неопредѣленность можетъ быть только кажущаяся, что происходитъ отъ присутствія въ членахъ дроби (въ числителѣ и въ знаменателѣ) общаго множителя, обращающагося въ нуль при допущенныхъ предположеніяхъ, что мы и видѣли на послѣднемъ примѣрѣ. *Въ этомъ случаѣ необходимо предварительно сократить на общаго множителя полученную дробь и затѣмъ только, въ упрощенной такимъ образомъ формулѣ, сдѣлать частныя предположенія: тогда мы получимъ* **истинное значеніе** *дроби для этого частнаго случая.*

Предположимъ, напр., что мы получили, какъ рѣшеніе нѣкоторой задачи, формулу

$$x = \frac{a^3 - 3a^2 + 4a - 2}{a^2 + 3a - 4}$$

и что при изслѣдованіи пришлось допустить, что $a = 1$. Оба члена этой дроби обращаются при такомъ допущеніи въ 0 и дробь принимаетъ видъ $\frac{0}{0}$. Но такъ какъ оба члена дроби — цѣлые многочлены относительно a, то по § 77-му они дѣлятся на $(a - 1)$. Выполнивъ это дѣленіе, мы придемъ къ упрощенной формулѣ

$$x = \frac{a^2 - 2a + 2}{a + 4},$$

которая при $a = 1$ принимаетъ уже опредѣленное значеніе, именно $x = \frac{1}{5}$.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Два сосуда, вмѣстимости которыхъ v и v', наполнены смѣсью воды и вина, въ отношеніи m къ n въ первомъ сосудѣ и въ отношеніи m' къ n'—во второмъ. Какой вмѣстимости x мы должны взять двѣ равныхъ между собою кружки, чтобы, наполнивъ ихъ заразъ,—одну изъ перваго сосуда, а другую—изъ второго,—и выливъ затѣмъ смѣсь изъ первой кружки во второй сосудъ, а изъ второй кружки—въ первый, получить въ обоихъ сосудахъ одно и то же отношеніе воды къ вину? Показать *à priori*, что результатъ не зависитъ отъ m, n, m', n'.

Отв. Составляемъ уравненіе

$$\frac{\frac{m(v-x)}{m+n}+\frac{m'x}{m'+n'}}{\frac{m'(v'-x)}{m'+n'}+\frac{mx}{m+n}}=\frac{\frac{n(v-x)}{m+n}+\frac{n'x}{m'+n'}}{\frac{n'(v'-x)}{m'+n'}+\frac{nx}{m+n}},$$

откуда

$$x=\frac{vv'}{v+v'}.$$

II. Три стрѣлки, часовая, минутная и секундная, стоятъ вмѣстѣ на циферблатѣ часовъ противъ XII. Спрашивается, черезъ сколько времени секундная стрѣлка раздѣлитъ на двѣ равныя части уголъ между двумя другими?

Отв. Обозначая черезъ x число протекшихъ секундъ, находимъ.

$$x=60^s\,\frac{780^s}{1427}.$$

III Три тѣла движутся равномѣрно по одной и той же прямой линіи со скоростями. v, v', v'' Въ началѣ движенія они находились на разстояніяхъ a, a', a'' отъ точки O на этой прямой и всѣ трое отъ этой точки удаляются. Черезъ сколько времени первое тѣло будетъ находиться на $\frac{3}{5}$ разстоянія, раздѣляющаго два другихъ?

Отв. Обозначая черезъ x протекшее время, находимъ:

$$x=\frac{2a'+3a''-5a}{5v-2v'-3v''}.$$

если, по истеченіи этого времени, третье тѣло впереди второго, и, наоборотъ,

$$c = \frac{3a' + 2a'' - 5a}{5v - 3v' - 2v''},$$

если, по истеченіи этого времени, второе тѣло впереди третьяго

Здѣсь можетъ быть или два рѣшенія, или одно, или не быть вовсе рѣшенія: изслѣдуются условія этихъ различныхъ случаевъ.

Рѣшеніе обобщаютъ, предполагая, что тѣла не движутся всѣ въ одномъ направленіи.

IV. Ребра даннаго прямоугольнаго параллелепипеда заданы числами a, b и c. Найти сторону x такого куба, чтобы отношеніе полныхъ поверхностей этихъ двухъ тѣлъ равнялось отношенію ихъ объемовъ.

Отв. $x = \dfrac{3abc}{ab + ac + bc}$.

V. Составить пропорцію, члены которой соотвѣтственно болѣе чиселъ a, b, c и d на одно и то же количество

Отв. Обозначая черезъ x число, которое нужно прибавить къ каждому изъ этихъ чиселъ, находимъ.

$$x = \frac{bc - ad}{a + d - b - c}.$$

Изслѣдовать рѣшеніе 1) когда $bc = ad$ и 2) когда $a + d = b + c$

VI. По прямой линіи размѣщены n камней на разстояніи d метровъ одинъ отъ другого. Найти на этой прямой такую точку X, что если перенести въ нее каждый камень послѣдовательно, начиная съ перваго, то мы сдѣлаемъ путь вдвое болѣе того, какой совершили бы, перенеся всѣ камни также послѣдовательно въ то мѣсто, гдѣ лежитъ первый, отправившись также отъ перваго

Отв. Обозначая черезъ x разстояніе точки X отъ перваго камня, предполагая, что она находится за послѣднимъ, находимъ.

$$x = \frac{3n(n-1)}{2n-1}d.$$

Задачу обобщаютъ, предполагая, что отношеніе проходимыхъ путей равно не 2, а m; тогда

$$x = \frac{(m+1)n(n-1)}{2n-1}d,$$

при чемъ изслѣдуются условія возможности задачи. Если рѣшеніе—отрицательное, то можно ли его истолковать?

VII. Для совершенія количества работы, равнаго m, въ n дней необходимо поставить или a мужчинъ, или b женщинъ. Сколько нужно было бы присоединить женщинъ къ $(a - p)$ мужчинамъ, чтобы выполнить количество работы, равное $(m + p)$ въ $(n - p)$ дней?

Отв. $x = \frac{bp}{a} \left\{ 1 + \frac{(m + n)a}{m(n - p)} \right\}$.

VIII. Двое часовъ A и B бьютъ одновременно и слышно было всего 19 ударовъ. Опредѣлить часъ, зная, что часы A опаздываютъ на 2 секунды противъ часовъ B и что удары часовъ A слѣдуютъ черезъ 3 секунды, а часовъ B черезъ 4 секунды одинъ послѣ другого. Наконецъ, когда удары обоихъ часовъ сливаются, ухо слышитъ только одинъ ударъ.

Отв. Обозначаемъ черезъ x число ударовъ каждыхъ часовъ, или, что одно и то же, искомое время, и замѣчаемъ, что число потерянныхъ для уха ударовъ будетъ $1 +$ цѣлая часть отъ $\frac{2x - 6}{7}$; отсюда заключаемъ, что $x = 11$

IX. Найти три числа x, y и z, расположенныхъ въ ариѳметической прогрессіи, такихъ, чтобы первое относилось къ третьему, какъ 5 къ 9 и чтобы сумма всѣхъ трехъ равнялась 63.

Отв. $x = 15$, $y = 21$, $z = 27$.

X. Данъ рядъ

$$a + b,\ ap + bq,\ ap^2 + bq^2,\ ap^3 + bq^3,\ ap^4 + bq^4,\ \ldots$$

Найти два такихъ числа x и y, чтобы каждый членъ этого ряда былъ бы равенъ суммѣ предыдущаго и предпредыдущаго, умноженныхъ соотвѣтственно на x и y.

Отв. Составляютъ третій и четвертый члены, по этому закону и находятъ:

$$x = p + q,\ y = -pq;$$

затѣмъ доказываютъ, что дѣйствительно эти множители даютъ всѣ члены ряда.

XI. Данъ рядъ

$$a + b + c,\ ap + bq + cr,\ ap^2 + bq^2 + cr^2,\ ap^3 + bq^3 + cr^3,\ \ldots$$

Найти 3 числа x, y и z такихъ, чтобы каждый членъ этого ряда былъ бы равенъ суммѣ трехъ предыдущихъ, умноженныхъ соотвѣтственно на x, y и z.

Отв. $x = p + q + r$, $y = -pq - pr - qr$, $z = pqr$.

XII. Поѣздъ T пущенъ со скоростью v послѣ другого поѣзда T', пущеннаго со скоростью v'. Опозданіе расчитано такъ, чтобы они прибыли одновременно на конечную станцію. Поѣздъ T' долженъ былъ замедлить на половину свою скорость, совершивъ $\frac{2}{3}$ всего пути; поэтому, встрѣча поѣздовъ произошла раньше за a миль до мѣста назначенія. Найти длину x всего пути.

Отв. $x = 6a - 3a\frac{v'}{v}$.

XIII. Для выполненія нѣкоторой работы A употребляетъ въ m разъ болѣе времени, чѣмъ B и C вмѣстѣ; B — въ n разъ болѣе, чѣмъ A и C вмѣстѣ; C въ p разъ болѣе, чѣмъ A и B вмѣстѣ. Найти зависимость между m, n и p.

Отв. $\frac{1}{m+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{p+1} = 1$.

XIV. Точки $A, B, C, D, \dots$ расположены на одной прямой, соотвѣтственно на разстояніяхъ $a, b, c, d, \dots$ отъ точки O, находящейся также на этой прямой. Найти на ней такую точку X, чтобы ея разстояніе x отъ какой-угодно точки M этой прямой было бы среднимъ ариѳметическимъ разстояній точекъ $A, B, C, D, \dots$ до точки M. Показать, что при помощи надлежащихъ соглашеній можно рѣшеніе этой задачи выразить одною формулою, каково бы ни было положеніе точекъ $A, B, C, D, \dots$ справа или слѣва отъ точки O.

Отв. $x = \frac{a+b+c+d+\dots}{n}$, гдѣ n есть число разсматриваемыхъ точекъ; эта формула не зависитъ отъ положенія точки M.

XV. Катеты двухъ прямоугольныхъ треугольниковъ направлены соотвѣтственно по однимъ и тѣмъ же прямымъ; длины катетовъ перваго треугольника a и b, длины катетовъ второго a' и b'. Изъ точки встрѣчи гипотенузъ опущены перпендикуляры на направленія катетовъ. Вычислить длины этихъ перпендикуляровъ и изслѣдовать всѣ случаи, какіе могутъ представиться.

Отв. Обозначая черезъ x перпендикуляръ на стороны a, a' и черезъ y на стороны b, b', находимъ:

$$x = \frac{aa'(b'-b)}{ab'-ba'},\quad y = \frac{bb'(a-a')}{ab'-ba'}.$$

ГЛАВА ШЕСТАЯ

Неравенства

I. Принципы, относящіеся къ неравенствамъ, разсматриваемымъ отдѣльно

§ 199. Опредѣленіе.— Говорятъ, что число a болѣе числа b, каковы бы ни были ихъ знаки, если разность $(a - b)$ положительна.

§ 200. Слѣдствія. — 1) *Всякое положительное число болѣе всякаго отрицательнаго.* Такъ, напр.,

$$1 > -8, \tag{1}$$

потому что разность $1 - (-8)$ по **§ 20**-му равна $1 + 8$, т.-е. она положительна.

2) *Отрицательное число тѣмъ болѣе, чѣмъ его абсолютная величина менѣе.* Такъ, напр.,

$$-7 > -20, \tag{2}$$

потому что разность $-7 - (-20)$ по **§ 20**-му равна $+20 - 7$, т.-е. она положительна.

3) *Нуль слѣдуетъ считать больше, чѣмъ всякое отрицательное число* Такъ, напр.,

$$0 > -4, \tag{3}$$

потому что разность $0 - (-4)$ по **§ 20**-му равна $0 + 4$, т.-е. она положительна.

Изъ предыдущаго вытекаетъ, что если написать всѣ числа, какъ положительныя, такъ и отрицательныя, въ видѣ слѣдующаго ряда:

$$-\infty, \ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots, \infty,$$

то окажется, что всякое число этого ряда болѣе каждаго изъ чиселъ, помѣщенныхъ влѣво отъ него, и менѣе каждаго изъ чиселъ, помѣщенныхъ вправо отъ него.

Что нѣкоторое число a положительно или что нѣкоторое число b отрицательно, выражаютъ обыкновенно формулами:

$$a > 0, \quad b < 0.$$

§ 201. Неравенства, содержащія неизвѣстную.—Условіе, называемое *неравенствомъ* и состоящее въ томъ, что выраженіе, зависящее отъ неизвѣстной, должно быть болѣе или менѣе какого-нибудь другого выраженія, даетъ возможность, вообще, опредѣлить тѣ предѣлы, между которыми должна или не должна находиться неизвѣстная. Въ настоящей главѣ мы поясним это на нѣсколькихъ примѣрахъ.

§ 202. Принципъ I. — *Можно, не измѣняя условій, выражаемыхъ неравенствомъ, увеличить или уменьшить обѣ его части на одно и то же число.*

Въ самомъ дѣлѣ, неравенство $a > b$ равносильно, по опредѣленію, неравенству $a - b > 0$; при всякомъ же m мы имѣемъ:

$$a - b \quad a + m \quad b - m = (a + m) \quad (b + m).$$

Слѣдовательно,

$$(a + m) - (b + m) > 0,$$

откуда, по опредѣленію,

$$a + m > b + m, \tag{4}$$

Отсюда вытекаетъ, что такъ же, какъ и въ уравненіи, *можно перенести какой-уодно членъ изъ одной части неравенства въ другую съ перемѣною знака.*

§ 203. Принципъ II. — *Можно умножить обѣ части неравенства на одно и то же положительное число.*

Въ самомъ дѣлѣ, неравенство $a > b$ равносильно неравенству $a - b > 0$. Но если умножить $(a - b)$ на какой нибудь положительный множитель m, произведеніе получится положительное. Слѣдовательно,

$$(a - b)m > 0, \text{ или } am - bm > 0,$$

откуда, по опредѣленію,

$$am > bm. \tag{5}$$

Также можно умножить обѣ части неравенства на какой-нибудь отрицательный множитель, стоитъ только при этомъ измѣнить смыслъ неравенства. Въ самомъ дѣлѣ, имѣя

$$a > b, \text{ или } a - b > 0,$$

и умноживъ $(a - b)$ на отрицательный множитель m, мы получимъ отрицательное произведеніе; слѣдовательно,

$$(a - b)m < 0, \text{ или } am - bm < 0,$$

откуда, наконецъ,

$$am < bm. \tag{6}$$

Съ помощью этихъ принциповъ такъ же, какъ и въ уравненіи, можно *освободиться отъ знаменателей въ неравенствѣ*, если извѣстенъ знакъ множителя. Тѣ же самые принципы прилагаются къ дѣленію обѣихъ частей неравенства на m; дѣйствительно, дѣленіе на m приводится къ умноженію на $\frac{1}{m}$, а оба эти числа, какъ m, такъ и $\frac{1}{m}$, всегда одного знака.

§ 204. Принципъ III. — *Если обѣ части неравенства положительны, то можно ихъ возвысить въ одну и ту же m-ую**) *степень, каково бы ни было m.*

Въ самомъ дѣлѣ, если одно число болѣе другого, то m-ая степень перваго и подавно болѣе такой же степени второго. Такъ, напр., $7 > 3$ даетъ $7^4 > 3^4$.

Если же хотя одна изъ частей неравенства—отрицательная, то необходимо различить нѣсколько случаевъ:

1) *Каковы бы ни были знаки обѣихъ частей неравенства, ихъ можно возвысить въ одну и ту же m-ую степень, если m—нечетное.* Дѣйствительно, обѣ части послѣ возвышенія въ этомъ случаѣ сохранятъ свои знаки, а потому сохранится и смыслъ неравенства. Напр.,

$$\left.\begin{array}{l} \text{при} \quad 7 > -13 \text{ имѣемъ } 7^3 > (-13)^3, \\ \quad „ \quad -7 > -13 \quad „ \quad (-7^3) > (-13)^3. \end{array}\right\} \tag{7}$$

2) Если же приходится возвышать обѣ части неравенства въ одну и ту же *четную степень*, то слѣдуетъ различить два случая:

*) Здѣсь m -цѣлое и положительное число, иначе выраженіе *„возвысить въ m-ую степень“* потеряло бы всякій смыслъ (§ 29).

Если обѣ части отрицательны, то смыслъ неравенства измѣняется; происходитъ это отъ того, что послѣ возвышенія въ степень обѣ части становятся положительными. Такъ, напр., изъ неравенства

$$-7 > -13$$

выводимъ послѣдовательно:

$$13 > 7, \quad 13^4 > 7^4, \quad (-13)^4 > (-7)^4,$$

и, значитъ,

$$(-7)^4 < (-13)^4. \qquad (8)$$

Если обѣ части неравенства знаковъ противоположныхъ, то никакого правила дать нельзя. Смыслъ неравенства въ этомъ случаѣ можетъ измѣниться, или остаться тѣмъ же самымъ, или неравенство можетъ даже перейти въ равенство. Такъ, напр.,

$$\left.\begin{array}{ll} 7 > -3, & 7^4 > (-3)^4, \\ 7 > -13, & 7^4 < (-13)^4, \\ 7 > -7, & 7^4 = (-7)^4. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

§ 205. Принципъ IV.—1) *Можно изъ обѣихъ частей неравенства извлечь корень нечетной степени, каковы бы ни были ихъ знаки*; дѣйствительно, въ этомъ случаѣ оба корня—того же знака, какъ и соотвѣтствующія подкоренныя числа. Напр.,

$$\left.\begin{array}{llll} 27 > 8 & \text{даетъ} & \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{8}, & \text{или} \quad 3 > 2, \\ 27 > -8 & „ & \sqrt[3]{27} > \sqrt[3]{-8}, & „ \quad 3 > -2, \\ -8 > -27 & „ & \sqrt[3]{-8} > \sqrt[3]{-27}, & „ \quad -2 > -3. \end{array}\right\} \qquad (10)$$

2) *При извлеченіи корня четной степени обѣ части должны быть положительными* (**§ 96**). Въ этомъ случаѣ *корень изъ каждой части имѣетъ два равныхъ, но противоположныхъ по знаку, значенія. Неравенство при этомъ сохранитъ или измѣнитъ свой смыслъ, смотря по тому, будемъ ли мы брать заразъ положительныя или заразъ отрицательныя значенія корней.* Такъ, напр., неравенство

$$36 > 25$$

даетъ:

$$\left.\begin{array}{ll} \sqrt{36} > \sqrt{25}, & \text{или} \quad 6 > 5, \\ -\sqrt{36} < -\sqrt{25}, & „ \quad -6 < -5. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Но *если эти два корня будутъ взяты съ различными знаками, то членъ отрицательный будетъ всегда меньше.* Такъ, напр., неравенство

$$36 > 25$$

даетъ:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{36} > -\sqrt{25}, \text{ или } 6 > -5, \\ \sqrt{25} > -\sqrt{36}, \quad „ \quad 5 > -6. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

II. Принципы, относящiеся къ совмѣстнымъ неравенствамъ

§ 206. Принципъ V. — *Можно сложить по-членно два неравенства одного и того же смысла; новое неравенство будетъ того же смысла, какъ и каждое изъ данныхъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть намъ даны два неравенства:

$$a > b, \quad c > d;$$

они равносильны слѣдующимъ:

$$a - b > 0, \quad c - d > 0.$$

А такъ какъ сумма двухъ положительныхъ количествъ также положительна, то, слѣдовательно, можемъ написать:

$$a - b + c - d > 0,$$

или

$$a + c > b + d. \qquad (13)$$

Но вновь полученное неравенство не можетъ замѣнить какое-либо изъ данныхъ подобно тому, какъ это имѣло мѣсто въ уравненiяхъ. Другими словами, двѣ системы:

$$\left\{\begin{array}{l} a > b, \\ c > d, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{c} a > b, \\ a + c > b + d \end{array}\right.$$

не равносильны: вторая есть слѣдствiе первой, но первая не есть слѣдствiе второй.

Если оба неравенства противоположны по смыслу, то для сложенія ихъ по-членно нельзя дать никакого правила. Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} 7 &> 3, \\ 8 &< 13, \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad 7 + 8 < 3 + 13;$$

$$\left.\begin{aligned} 7 &> 3, \\ 8 &< 12, \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad 7 + 8 = 3 + 12;$$

$$\left.\begin{aligned} 7 &> 3, \\ 8 &< 10, \end{aligned}\right\} \quad \text{и} \quad 7 + 8 > 3 + 10.$$

§ 207. Принципъ VI.—*Можно изъ одного неравенства вычесть по-членно другое, по смыслу противоположное первому: новое неравенство будетъ того же смысла, какъ и первое.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть намъ даны два неравенства:

$$a > b, \quad c < d;$$

они равносильны слѣдующимъ:

$$a > b, \quad d > c,$$

а въ такомъ случаѣ по **§ 206**-му можемъ написать:

$$a + d > b + c,$$

или (**§ 202**)

$$a - c > b - d. \qquad (14)$$

Вновь полученное неравенство не можетъ замѣнить какое-либо изъ данныхъ.

Нельзя вычесть одно неравенство изъ другого, если они одного и того же смысла (**§ 206**).

§ 208. Принципъ VII.—*Можно перемножить по-членно два неравенства одного и того же смысла, если всѣ части положительны: новое неравенство будетъ того же смысла, какъ и каждое изъ данныхъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть намъ даны неравенства:

$$a > b, \quad c > d.$$

Такъ какъ c и b положительны, то мы получимъ послѣ умноженія перваго неравенства на c, а второго на b (§ 203):

$$ac > bc, \quad bc > bd,$$

откуда

$$ac > bd. \tag{15}$$

Если всѣ четыре части отрицательны, то новое неравенство противоположно по смыслу каждому изъ данныхъ. Такъ какъ c и b отрицательны, то мы получимъ послѣ умноженія перваго неравенства на c, а второго на b:

$$ac < bc, \quad bc < bd,$$

откуда

$$ac < bd. \tag{16}$$

Новое неравенство (15) или (16) не можетъ замѣнить какое-либо изъ данныхъ.

Нельзя дать общаго правила относительно перемноженія неравенствъ въ томъ случаѣ, когда не всѣ части заразъ положительны, или заразъ отрицательны. Совершенно ничего нельзя сказать тогда, когда неравенства противоположны по смыслу.

§ 209. Принципъ VIII.—*Можно раздѣлить одно неравенство почленно на другое, противоположное по смыслу первому, если всѣ части положительны: новое неравенство будетъ одинаково по смыслу съ первымъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть намъ даны неравенства:

$$a > b, \quad c < d.$$

Переписавъ эти неравенства въ видѣ:

$$a > b, \quad d > c,$$

заключаемъ по § 208-му, что

$$ad > bc;$$

наконецъ, раздѣливъ обѣ части на cd (§ 203), получимъ:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{d}. \tag{17}$$

Если всѣ четыре части отрицательны, то новое неравенство будетъ того же смысла, какъ и второе. Въ самомъ дѣлѣ, перемножая ихъ, имѣемъ (**§ 208**):

$$ad < bc;$$

а такъ какъ cd положительно, то, дѣля это послѣднее неравенство на cd, получаемъ:

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

Нельзя дать общаго правила въ другихъ случаяхъ.

III. Неравенства первой степени съ одною неизвѣстною

§ 210. Рѣшеніе неравенства.—Неравенство съ одною неизвѣстною считается *первой степени*, если оно можетъ быть приведено къ виду:

$$ax + b > a'x + b',$$

гдѣ a, b, a', b' обозначаютъ данныя числа, положительныя или отрицательныя.

Чтобы *рѣшить* такое неравенство, собираютъ всѣ члены, содержащіе неизвѣстную, въ одну часть неравенства, а всѣ извѣстные члены въ другую (**§ 202**)

$$(a - a')x > b' - b.$$

Далѣе различаютъ два случая:

1) Если $(a - a')$ положительно, то по раздѣленіи на $(a - a')$ (**§ 203**) имѣемъ:

$$x > \frac{b' - b}{a - a'}.$$

2) Если $(a - a')$ отрицательно, то по раздѣленіи на $(a - a')$ (**§ 203**) будемъ, напротивъ, имѣть:

$$x < \frac{b' - b}{a - a'}.$$

Итакъ, *чтобы удовлетворить неравенству, достаточно взять x выше или ниже нѣкотораго предѣла.* Замѣтимъ, что этотъ предѣлъ есть какъ разъ то значеніе для x, которое обѣ части неравенства сдѣлало бы равными.

§ 211. Задача.—Приложимъ наши разсужденія къ рѣшенію слѣдующей задачи: *Двѣ точки A и B находятся на разстояніи $2c$. Извѣстно, что точка M удовлетворяетъ равенству $MA + MB = 2a$, гдѣ a — данная длина, бо́льшая, чѣмъ c. Спрашивается, между какими предѣлами могутъ измѣняться AM и BM.*

Предположимъ, что $AM > BM$. Обозначаемъ AM черезъ x и BM черезъ y. Прежде всего, по условію задачи,

$$x + y = 2a. \tag{1}$$

Далѣе, чтобы треугольникъ AMB былъ возможенъ, необходимо, чтобы каждая изъ сторонъ была меньше суммы двухъ другихъ, т.-е. чтобы было.

$$2c < x + y, \quad y < 2c + x, \quad x < 2c + y.$$

Первое изъ этихъ неравенствъ очевидно въ силу уравненія (1); второе также очевидно, потому что y меньше x. Слѣдовательно, остается разсмотрѣть третье

$$x < 2c + y \tag{2}$$

Если здѣсь замѣнить y его значеніемъ $(2a - x)$, то это неравенство преобразуется въ такое:

$$x < 2c + 2a - x,$$

откуда

$$x < a + c. \tag{3}$$

А y, равное $(2a - x)$, станетъ болѣе этой же величины, если замѣнить въ ней x черезъ $(a + c)$, и на столько болѣе, на сколько x менѣе $(a + c)$. Слѣдовательно, y должно быть болѣе $[2a - (a + c)]$, т.-е. болѣе $(a - c)$. Итакъ,

$$y > a - c. \tag{4}$$

Таковы искомые предѣлы.

УПРАЖНЕНІЯ

1. Доказать, что средняя ариѳметическая двухъ положительныхъ неравныхъ чиселъ болѣе средней пропорціональной между ними (ихъ средней геометрической).

Отв. Исходятъ изъ неравенства $(a - b)^2 > 0$.

II. Даны два положительныхъ числа a и b, при чемъ $a > b$. Вывести изъ неравенства

$$\frac{x+a}{\sqrt{a^2+x^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{b^2+x^2}}$$

предѣлы, между которыми должно заключаться значенie x. Радикалы взяты со знакомъ $+$.

Отв. x должно быть или отрицательно, или больше $\sqrt{ab}$.

III. Доказать, что $\sqrt[m+n+p+q]{abcd}$ заключается между наибольшимъ и наименьшимъ изъ четырехъ выраженій $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, $\sqrt[p]{c}$, $\sqrt[q]{d}$.

Отв. Доказываютъ это свойство для логариѳмовъ этихъ выраженій и уже отсюда получаютъ его, какъ слѣдствіе, для самихъ выраженій.

IV. Доказать, что всегда существуетъ неравенство

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots < \sqrt{a^2+a'^2+a''^2+\ldots}\sqrt{\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2+\ldots},$$

если только нѣтъ пропорціональности

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a'}{\alpha'} = \frac{a''}{\alpha''} = \ldots$$

Отв. Сначала предполагаютъ $a, a', a'', \ldots, \alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ положительными, и доказываютъ неравенство, возвышая обѣ части въ квадратъ; затѣмъ обобщаютъ.

V. Доказать, что $x^5 + y^5 - x^4y - xy^4$ всегда положительно, каковы бы ни были положительныя значенія x и y.

Отв. Для доказательства разлагаютъ выраженіе на множителей.

VI. Доказать, что $3(1 + a^2 + a^4) > (1 + a + a^2)^2$, каковы бы ни были, положительныя или отрицательныя, значенія a.

Отв. Тотъ же способъ доказательства.

VII. Доказать, что $abc > (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$, каковы бы ни были положительныя неравныя числа a, b, c.

Отв. Исходятъ изъ очевидныхъ неравенствъ вида: $a^2 > a^2 - (b-c)^2$.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

Изслѣдованіе общихъ формулъ

I. Изслѣдованіе общей формулы рѣшенія уравненія первой степени съ одною неизвѣстной

§ 212. Общая формула. — Уравненіе первой степени съ одною неизвѣстною можетъ содержать члены только двухъ видовъ: члены, куда входитъ неизвѣстная, и члены, свободные отъ нея. Слѣдовательно, послѣ приведенія подобныхъ членовъ въ каждой части уравненія самый общій видъ его будетъ слѣдующій:

$$ax + b = a'x + b', \tag{1}$$

откуда

$$(a - a')x = b' - b,$$

дѣля же обѣ части на $(a - a')$, получаемъ формулу рѣшенія:

$$x = \frac{b' - b}{a - a'}. \tag{2}$$

Однако, эта формула равносильна уравненію (1) только въ томъ случаѣ, если $(a - a')$ отлично отъ нуля (§ 124).

§ 213. Изслѣдованіе формулы. — Когда a' не равно a, формула (2) представляетъ положительное или отрицательное число, или нуль и, будучи подставлено въ уравненіе (1), обращаетъ, послѣ выполненія соотвѣтствующихъ дѣйствій, каждую его часть въ одно и то же число. Итакъ, одинъ только случай, когда $(a - a')$ равно 0, должно разсмотрѣть особо. При этомъ можно сдѣлать два предположенія:

1) $(a - a')$ *равно* 0, а $(b - b')$ *отлично отъ* 0. Формула (2) принимаетъ видъ:

$$x = \frac{b' - b}{0}.$$

который не представляетъ никакого числа. Если обратимся къ уравненію для истолкованія такого результата, то увидимъ, что при $a' = a$

$$ax + b = ax + b',$$

чего быть не можетъ, потому что b' не равно b.

Итакъ *уравненіе невозможно, и эта невозможность выражается формулою вида:* $x = \frac{m}{0}$.

2) $(a - a')$ и $(b - b')$ *одновременно равны* 0. Формула (2) принимаетъ видъ:

$$x = \frac{0}{0},$$

который не представляетъ никакого числа. Обращаясь къ уравненію, видимъ, что оно принимаетъ такой видъ:

$$ax + b = ax + b,$$

откуда заключаемъ, что *уравненіе удовлетворяется при всякомъ* x, *эта неопредѣленность выражается формулою вида:* $x = \frac{0}{0}$.

Такимъ образомъ, уравненіе первой степени съ одною неизвѣстною или имѣетъ рѣшеніе единственное и опредѣленное, или не имѣетъ никакого, или, наконецъ, имѣетъ ихъ безчисленное множество.

II. Полное изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія системы двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными

§ 214. Общія формулы. — Извѣстно (§ 143), что система двухъ уравненій съ 2-мя неизвѣстными x и y можетъ быть приведена всегда къ виду:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c, \\ a'x + b'y &= c', \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Примѣнимъ къ этой системѣ одинъ изъ извѣстныхъ методовъ, хотя бы методъ сложенія и вычитанія. Для этого умножаемъ первое уравненіе на b', а второе на b, и вычитаемъ второй результатъ изъ перваго:

$$(ab' - ba')x = cb' - bc', \text{ откуда } x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Наоборотъ, умноживъ первое уравненіе на a', а второе на a, и вычтя первый результатъ изъ второго, получимъ:

$$(ab'-ba')y=ac'-ca', \text{ откуда } y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}.$$

Итакъ, система (1) имѣетъ рѣшеніе

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}, \quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}. \tag{2}$$

Формулы (2) суть общія формулы рѣшенія. Онѣ справедливы, до тѣхъ поръ пока $(ab'-ba')$ не равно нулю: легко провѣрить, что въ этомъ случаѣ онѣ, дѣйствительно, удовлетворяютъ уравненіямъ.

§ 215. Правило составленія этихъ формулъ. — Не трудно сразу написать эти формулы при помощи слѣдующихъ замѣчаній.

1) Чтобы составить ихъ общій знаменатель $(ab'-ba')$, пишутъ одну за другою обѣ *перестановки* ab и ba изъ двухъ буквъ a и b, раздѣляя ихъ знакомъ —, и надъ второю буквою каждой перестановки ставятъ $'$.

2) Чтобы составить числитель каждой изъ формулъ (2), замѣняютъ въ выраженіи $(ab'-ba')$ буквы, служащія коэффиціентами при опредѣляемой неизвѣстной въ уравненіяхъ, соотвѣтствующими свободными членами. Такъ, напр., для полученія числителя формулы, выражающей значеніе x, замѣняютъ a и a' соотвѣтственно черезъ c и c', а для числителя формулы, выражающей значеніе y, замѣняютъ b и b' черезъ c и c'.

§ 216. Путь при изслѣдованіи формулъ. — Если двучленъ $(ab'-ba')$ не нуль, формулы (2) не представляютъ никакой трудности; онѣ для x и y даютъ вполнѣ опредѣленныя значенія. Система (1) имѣетъ одно и только одно рѣшеніе. Итакъ, намъ остается испытать тотъ случай, когда $ab'-ba'=0$.

Предположимъ сначала, что при существованіи такого равенства ни одинъ изъ коэффиціентовъ a, b, a', b' не нуль. Тогда это равенство равносильно слѣдующему:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'},$$

т.-е. что *коэффиціенты при обѣихъ неизвѣстныхъ, въ обоихъ уравненіяхъ, соотвѣтственно пропорціональны.*

Мы испытаемъ, что представятъ при такомъ предположеніи формулы (2), и постараемся истолковать полученные результаты, обратившись къ уравненіямъ (1).

§ 217. Теорема I. — *Въ томъ случаѣ, когда* $ab' - b'a = 0$ *числители значеній* (2) *для* x *и* y *или заразъ нули, или ни одинъ изъ нихъ не нуль.*

Для доказательства замѣтимъ, что условіе $ab' - ba' = 0$ даетъ

$$b' = \frac{ba'}{a};$$

слѣдовательно, обозначая числителей x и y соотвѣтственно черезъ N_x и N_y и замѣняя въ первомъ изъ нихъ b' его значеніемъ, получаемъ:

$$N_x = cb' - bc' = \frac{cba'}{a} - bc' = \frac{cba' - abc'}{a} = \frac{b(ca' - ac')}{a}.$$

Но $(ca - ac')$ есть не что иное, какъ числитель y съ измѣненнымъ знакомъ; слѣдовательно,

$$N_x = -\frac{b}{a} N_y.$$

Такъ какъ ни b, ни a не равно нулю, то отсюда заключаемъ, что если N_y нуль, то N_x также нуль; если же N_y не нуль, то N_x также не нуль. Теорема такимъ образомъ доказана.

Отсюда вытекаетъ, что *значенія* x *и* y *одновременно принимаютъ видъ* $\frac{0}{0}$, *или одновременно же видъ* $\frac{m}{0}$.

§ 218. Теорема II. — *Въ этомъ случаѣ, когда* $ab' - ba' = 0$, *уравненія* (1) *или несовмѣстны, или каждое изъ нихъ заключается въ другомъ.*

Для доказательства подставимъ вмѣсто b' его значеніе во второе изъ уравненій (1); тогда получимъ:

$$a'x + \frac{ba'}{a} y = c', \text{ или } aa'x + ba'y = ac'.$$

Съ другой стороны, умноживъ первое изъ уравненій (1) на a', получимъ:

$$aa'x + ba'y = ca'.$$

Такимъ образомъ, въ этомъ случаѣ, уравненія (1) равносильны двумъ другимъ уравненіямъ, у которыхъ первая часть одна и та же, а вторыя части суть ac' и ca'. Слѣдовательно, если ac' и ca' не равны, то уравненія несовмѣстны; если же $ac' = ca'$, то они тождественны. Итакъ, теорема доказана.

§ 219. Слѣдствія. — 1) Если ac' не равно ca, то N_y не нуль; слѣдовательно (**§ 217**), N_x также не нуль. Поэтому, *если уравненія* (1) *несовмѣстны, то обѣ формулы* (2) *принимаютъ видъ* $\frac{m}{0}$. *Итакъ, этотъ видъ есть символъ невозможности.*

2) Если $ac' = ca'$, то какъ N_x, такъ и N_y (**§ 217**) равны нулю. Поэтому, *если каждое изъ уравненій* (1) *заключается въ другомъ, то обѣ формулы* (2) *принимаютъ видъ* $\frac{0}{0}$. *Итакъ, этотъ видъ есть символъ неопредѣленности.*

Слѣдовательно, система двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными допускаетъ или только одно рѣшеніе, при томъ вполнѣ опредѣленное, или же не допускаетъ никакого, или, наконецъ, допускаетъ ихъ безчисленное множество. При этомъ изслѣдованіи мы предполагали, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ при неизвѣстныхъ не равенъ нулю; намъ теперь остается разсмотрѣть особые случаи, когда нѣкоторые изъ нихъ равны нулю при $ab' - ba' = 0$.

§ 220. Случай, когда одинъ изъ коэффиціентовъ равенъ нулю при $ab' - ba' = 0$. — Предположимъ, что одновременно

$$ab' - ba' = 0, \quad b' = 0;$$

отсюда вытекаетъ, что $ba' = 0$, а это возможно или тогда, когда $a' = 0$, или когда $b = 0$:

1) При $a = 0$ формулы (2) преобразовываются въ:

$$x = \frac{-bc'}{0}, \quad y = \frac{ac'}{0}.$$

Слѣдовательно, если c' не равно нулю, обѣ онѣ принимаютъ видъ $\frac{m}{0}$, а если $c' = 0$, обѣ онѣ принимаютъ видъ $\frac{0}{0}$. Уравненія въ пер-

вомъ случаѣ будутъ:

$$ax + by = c, \quad 0 = c',$$

т.-е. они несовмѣстны, такъ какъ 2-ое уравненіе при такихъ предположеніяхъ невозможно. Во второмъ случаѣ вмѣсто двухъ уравненій будетъ одно, потому что второе уравненіе становится тождествомъ. Итакъ, *виды* $\frac{m}{0}$ *и* $\frac{0}{0}$, *подъ которыми являются здѣсь формулы, служатъ символами: первый—невозможности, а второй—неопредѣленности.*

2) При $b = 0$, формулы преобразовываются въ:

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{ac' - ca'}{0},$$

т.-е. если ca' не равно ac', то y приметъ видъ $\frac{m}{0}$, между тѣмъ какъ x сохранитъ видъ $\frac{0}{0}$. Это—исключеніе изъ теоремы § 217-го Въ этомъ случаѣ уравненія будутъ:

$$ax = c, \quad a'x = c';$$

они содержатъ только одну неизвѣстную x и даютъ:

$$x = \frac{c}{a}, \quad x = \frac{c'}{a'},$$

при чемъ $\frac{c}{a}$ не равно $\frac{c'}{a'}$, такъ какъ иначе ca' было бы равно ac'. Слѣдовательно, *уравненія несовмѣстны; эта невозможность выражается здѣсь одновременно двумя символами:* $\frac{m}{0}$ и $\frac{0}{0}$. — Если же $ac' = ca'$, то обѣ формулы примутъ видъ $\frac{0}{0}$, а уравненія приведутся къ одному:

$$x = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'}.$$

Это уравненіе опредѣляетъ значеніе x, но значеніе y остается неопредѣленнымъ. Слѣдовательно, здѣсь—частная неопредѣленность, выраженная символомъ $\frac{0}{0}$. Слѣдуетъ замѣтить, что этотъ видъ принимаютъ обѣ формулы, хотя значеніе x—вполнѣ опредѣленное.

Эта часть изслѣдованія содержитъ два случая: 1) когда коэффиціенты при обѣихъ неизвѣстныхъ въ *одномъ и томъ же* уравненіи равны нулю и 2) когда коэффиціенты при *одной и той же* неизвѣстной въ обоихъ уравненіяхъ равны нулю. Намъ остается разсмотрѣть лишь одинъ слѣдующій случай.

§ 221. Случай, когда при $ab' - ba' = 0$ коэффиціентъ при x въ одномъ изъ уравненій и коэффиціентъ при y въ другомъ равны нулю.— Предположимъ, напр., что при $ab' - ba' = 0$

$$a = 0, \quad b' = 0.$$

Отсюда вытекаетъ, что $ba' = 0$, т.-е. что второй коэффиціентъ при одной изъ неизвѣстныхъ также равенъ нулю. Пусть $b = 0$. Тогда формулы преобразовываются въ:

$$x = \frac{0}{0}, \quad y = \frac{-ca'}{0},$$

а уравненія будутъ:

$$0 = c, \quad a'x = c'.$$

Слѣдовательно, 1) если ни c, ни a' не равны нулю, то первое уравненіе невозможно; *эта невозможность изобразится здѣсь одновременно двумя символами:* $\frac{0}{0}$ и $\frac{m}{0}$.

2) Если c нуль, то первое уравненіе обращается въ тождество, второе же даетъ вполнѣ опредѣленное значеніе для x; *здѣсь— частная неопредѣленность, выраженная символомъ* $\frac{0}{0}$.

3) Если, наконецъ, $a' = 0$, то будетъ *невозможность*, хотя обѣ формулы примутъ видъ $\frac{0}{0}$.

§ 222. Таблица изслѣдованія.—Предыдущее изслѣдованіе можно сжато представить въ слѣдующихъ таблицахъ:

Общіе случаи:

I. $ab' - ba' \gtrless 0$ $\left\{ x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \; y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} \right.$; одно опредѣленное рѣшеніе.

II. $ab' - ba' = 0$ $\begin{cases} ac' - ca' \gtrless 0, \; x = \frac{cb' - bc'}{0}, \; y = \frac{ac' - ca'}{0}; & \text{невозможность.} \\ ac' - ca' = 0, \; x = \frac{0}{0}, \; y = \frac{0}{0}; & \text{неопредѣленность.} \end{cases}$

Частные случаи $\begin{cases} ab' - ba' = 0 \\ b' = 0 \end{cases}$

- $a' = 0$:
  - $c' \gtrless 0$, $x = \frac{bc'}{0}$, $y = -\frac{ac'}{0}$; невозможность.
  - $c' = 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$; неопредѣленность.
- $b = 0$:
  - $ac' - ca' \gtrless 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{ac' - ca'}{0}$: невозможность.
  - $ac' - ca' = 0$, $x = \frac{c}{a}$, $y = \frac{0}{0}$; частная неопредѣленность.
- $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$:
  - $c \gtrless 0$, $a' \gtrless 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = -\frac{ca'}{0}$; невозможность.
  - $c = 0$, $x = \frac{c'}{a'}$, $y = \frac{0}{0}$, частная неопредѣленность.
  - $a' = 0$, $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$; невозможность.

§ 223. Случай, когда c и c' заразъ равны нулю. — Отдѣльно отъ тѣхъ случаевъ, которые нами уже разсмотрѣны, разсматриваютъ еще одинъ, когда оба извѣстныхъ члена, c и c', заразъ равны нулю. Формулы преобразовываются въ:

$$x = \frac{0}{ab' - ba'}, \quad y = \frac{0}{ab' - ba'}.$$

Слѣдовательно, если $ab' - ba'$ не равно нулю, то $x = 0$, $y = 0$. Но если $ab' - ba' = 0$, формулы принимаютъ видъ: $x = \frac{0}{0}$, $y = \frac{0}{0}$.

Чтобы истолковать эти результаты, обратимся къ уравненіямъ; они въ этомъ случаѣ будутъ:

$$\begin{cases} ax + by = 0, \\ a'x + b'y = 0, \end{cases}$$

или

$$x = -\frac{b}{a}y, \quad x = -\frac{b'}{a'}y.$$

Отсюда заключаемъ, что *если* $\frac{b}{a}$ *не равно* $\frac{b'}{a'}$, *т.-е. если* $(ab' - ba')$

не равно нулю, то такія уравненія не имѣютъ другого рѣшенія, кромѣ $x = 0$, $y = 0$. Но *если* $\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$, *т.-е. если* $ab' - ba' = 0$, *то каждое изъ уравненій заключается въ другомъ, т.-е. будетъ неопредѣленность, выраженная символомъ* $\frac{0}{0}$. Слѣдуетъ замѣтить, что *въ этомъ послѣднемъ случаѣ отношеніе неизвѣстныхъ вполнѣ опредѣленное:*

$$\frac{x}{y} = -\frac{b}{a} = -\frac{b'}{a'}.$$

III. Краткое изслѣдованіе общихъ формулъ рѣшенія системы трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными

§ 224. Общія формулы. — Уравненіе первой степени съ тремя неизвѣстными x, y, z можетъ содержать члены только четырехъ видовъ: члены съ x, члены съ y, члены съ z и извѣстные члены. Слѣдовательно, система трехъ уравненій можетъ быть всегда приведена къ виду:

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= k, \\ a'x + b'y + c'z &= k', \\ a''x + b''y + c''z &= k''. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Для рѣшенія ея воспользуемся способомъ Безу (**§ 154**): множимъ первое уравненіе на λ, второе на λ' и полученныя произведенія вмѣстѣ съ третьимъ уравненіемъ складываемъ по-членно; получаемъ:

$$(a\lambda + a'\lambda' + a'')x + (b\lambda + b'\lambda' + b'')y + (c\lambda + c'\lambda' + c'')z = k\lambda + k'\lambda' + k''. \qquad (2)$$

Далѣе, полагаемъ

$$b\lambda + b'\lambda' + b'' = 0, \quad c\lambda + c'\lambda' + c'' = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{c'b'' - b'c''}{cb' - bc'}, \quad \lambda = \frac{bc'' - cb''}{cb' - bc'};$$

подставляя эти значенія въ уравненіе (2), мы находимъ послѣ выполненія всѣхъ вычисленій:

$$x = \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}.$$

Подобнымъ же путемъ мы могли бы найти значенія y и z. Но гораздо выгоднѣе замѣтить, что если въ первомъ уравненіи измѣнить x на y, y на z и z на x, а также a на b, b на c и c на a, то это уравненіе преобразуется въ $by + cz + ax = k$, т.-е. оно не перемѣнится. То же самое относится и къ двумъ другимъ уравненіямъ. Слѣдовательно, мы получимъ значеніе y, если сдѣлаемъ указанныя перестановки въ формулѣ, дающей значеніе x, а сдѣлавъ тѣ же самыя перестановки въ формулѣ для y, получимъ значеніе z. Замѣчаемъ при этомъ, что знаменатель не измѣняется; система же рѣшеній будетъ такая:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{kb'c'' - kc'b'' + ck'b'' - bk'c'' + bc'k'' - cb'k''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}, \\ y &= \frac{ak'c'' - ac'k'' + ca'k'' - ka'c'' + kc'a'' - ck'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}, \\ z &= \frac{ab'k'' - ak'b'' + ka'b'' - ba'k'' + bk'a'' - kb'a''}{ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Эти формулы имѣютъ мѣсто только тогда, когда ихъ общій знаменатель не нуль. Въ этомъ случаѣ не трудно провѣрить, что онѣ удовлетворяютъ уравненіямъ (1).

§ 225. Правило составленія предыдущихъ формулъ.—Чтобы написать ихъ общій знаменатель, берутъ двѣ *перестановки* ab и ba и помѣщаютъ въ каждой изъ нихъ букву c послѣдовательно справа, въ срединѣ и слѣва; такимъ образомъ получаютъ:

$$abc,\ acb,\ cab \quad \text{и} \quad bac,\ bca,\ cba.$$

Далѣе, въ каждой изъ вновь полученныхъ перестановокъ надъ второю буквою ставятъ одинъ значекъ $'$, а надъ третьею — два значка $''$. Наконецъ, полученнымъ различнымъ членамъ придаютъ поперемѣнно знаки $+$ и $-$. Такъ составляется общій знаменатель D:

$$D = ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''.$$

Можно еще и другимъ способомъ составить этотъ знаменатель. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно, что его можно представить въ такомъ видѣ:

$$D = a(b'c'' - c'b'') + b(c'a'' - a'c'') + c(a'b'' - b'a'');$$

слѣдовательно, онъ есть сумма произведеній, получаемыхъ отъ умноженія коэффиціентовъ a, b и c перваго уравненія соотвѣтственно на разности $(b'c'' - c'b'')$, $(c'a'' - a'c'')$, $(a'b'' - b'a')$. А эти разности составляются изъ произведеній *на крестъ* въ двухъ другихъ уравненіяхъ коэффиціентовъ, взятыхъ не при той неизвѣстной, при которой служатъ коэффиціентами соотвѣтственно a, b и c. Такимъ образомъ, мы беремъ, располагая коэффиціенты въ слѣдующей таблицѣ:

$$a',\ b',\ c',$$

$$a'',\ b'',\ c'',$$

какъ множитель для коэффиціента a, разность $(b'c'' - c'b'')$, $\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}$; какъ множитель для коэффиціента b — разность $(c'a'' - a'c'')$, $\frac{2}{1}\times\frac{1}{2}$ и, наконецъ, какъ множитель для коэффицента c, разность $(a'b'' - b'a'')$, $\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}$. Необходимо имѣть въ виду, что крестъ, образуемый линіями, соединяющими множителей каждаго произведенія, долженъ начинаться попеременно съ линій, идущихъ въ разныхъ направленіяхъ, что и видно на цифровыхъ фигурахъ, стоящихъ при разностяхъ.

Когда общій знаменатель уже составленъ, то изъ него получаютъ числитель каждой неизвѣстной, замѣняя въ немъ каждый коэффиціентъ при опредѣляемой неизвѣстной извѣстнымъ членомъ соотвѣтствующаго уравненія, т.-е. ставя k, k', k'' вмѣсто a, a', a'', если опредѣляютъ x; тѣ же буквы вмѣсто b, b', b'', если опредѣляютъ y и вмѣсто c, c', c'', если опредѣляютъ z.

§ 226. Изслѣдованіе.—Если D не равенъ нулю, система имѣетъ только одно и притомъ вполнѣ опредѣленное рѣшеніе, выраженное формулами (3). Поэтому остается разсмотрѣть лишь тотъ случай, когда $D = 0$. Уравненіе (2), служащее послѣдовательно для опредѣленія значеній x, y и z, даетъ:

$$Dx = m,\quad Dy = n,\quad Dz = p.$$

Слѣдовательно, если $D = 0$ и хотя одно изъ количествъ m, n, p не равно нулю, то соотвѣтствующее уравненіе невозможно. Система, поэтому, тоже невозможна, и эта невозможность выразится симво-

ломъ $\frac{m}{0}$; *подъ такимъ видомъ явится значеніе, по крайней мѣрѣ, одной изъ неизвѣстныхъ.*

Если же, наоборотъ, *заразъ* $D = 0$, $m = 0$, $n = 0$, $p = 0$, уравненія будутъ удовлетворены, каковы бы ни были x, y, z, *система становится неопредѣленною, и эта неопредѣленность выразится символомъ* $\frac{0}{0}$, *общимъ для всѣхъ трехъ неизвѣстныхъ.*

§ 227. Случай, когда вторыя части уравненій (1) равны нулю. — Разсмотримъ, наконецъ, случай, когда предложенныя уравненія не содержатъ ни одного члена, свободнаго отъ неизвѣстныхъ тогда уравненія будутъ выражать зависимость между отношеніями неизвѣстныхъ. Для опредѣленія этихъ отношеній достаточно двухъ уравненій, такъ какъ и неизвѣстныхъ станетъ на одну меньше. Въ самомъ дѣлѣ, первыя два уравненія

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

мы можемъ написать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\begin{cases} a\frac{x}{z} + b\frac{y}{z} = -c, \\ a'\frac{x}{z} + b'\frac{y}{z} = -c' \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{x}{z} = \frac{c'b - b'c}{ab' - ba'}, \\ \frac{y}{z} = \frac{c'a - c'a}{ab' - ba'}. \end{cases}$$

Дополняемъ теперь эту послѣднюю систему третьимъ уравненіемъ; изъ полученныхъ отношеній выводимъ x и y въ зависимости отъ z и эти значенія подставляемъ вмѣсто x и y въ 3-е уравненіе; находимъ:

$$Dz = 0.$$

Итакъ, *если D не равно нулю, то необходимо, чтобы $z = 0$, а тогда и $x = 0$, и $y = 0$.* Это будетъ рѣшеніемъ въ данномъ случаѣ.

Если же $D = 0$, то послѣднее уравненіе удовлетворяется при всякомъ z; оно есть слѣдствіе двухъ первыхъ уравненій: *настаетъ*, такимъ образомъ, *неопредѣленность, выражаемая символомъ* $\frac{0}{0}$, *въ который превращаются общія формулы; отношенія же неизвѣстныхъ остаются опредѣленными.*

IV. Изслѣдованіе задачи о курьерахъ

§ 228. Задача.—Въ заключеніе этой главы мы приведемъ одну задачу: изслѣдованіе ея рѣшенія будетъ содержать въ себѣ вкратцѣ все изложенное выше. Въ ней мы найдемъ замѣчательное приложеніе теоріи отрицательныхъ количествъ, въ ней же мы встрѣтимся и съ различными случаями невозможности и неопредѣленности, о которыхъ было говорено.

Два курьера M *и* M' *ѣдутъ по неопредѣленной прямой* XX', *въ направленіи* XX', *со скоростями* v *и* v'; *курьеръ* M *пріѣзжаетъ въ точку* A *этой прямой* h *часами раньше, чѣмъ курьеръ* M' *въ точку* A' *на этой же линіи. Разстояніе* $AA' = d$. *Опредѣлить точку встрѣчи двухъ курьеровъ.*

X —— R'' —— A —— R' —— A' —— R —— X'

Искомая точка встрѣчи можетъ лежать или въ точкѣ R, вправо отъ A', или въ точкѣ R', между A и A', или, наконецъ, въ точкѣ R'', влѣво отъ A; положеніе ея зависитъ отъ чиселъ v, v', d, h. Итакъ, необходимо различить нѣсколько случаевъ.

§ 229. Первый случай.—*Пусть* $v > v'$, $d > vh$. Такъ какъ курьеръ M проѣзжаетъ v километровъ въ часъ, то въ h часовъ онъ проѣдетъ vh километровъ; слѣдовательно, когда M' будетъ въ A', M будетъ на разстояніи vh отъ точки A. Такимъ образомъ условіе $d > vh$ обозначаетъ, что въ этотъ моментъ M не будетъ еще въ A: онъ будетъ позади M'; а такъ какъ онъ ѣдетъ быстрѣе послѣдняго ($v > v'$), то онъ встрѣтится съ нимъ вправо отъ A'.

Пусть R въ этомъ случаѣ будетъ точкою встрѣчи: примемъ за неизвѣстную разстояніе $A'R = x$. Курьеръ M проѣзжаетъ разстояніе $AR = d + x$ въ теченіи времени $\frac{d+x}{v}$; курьеръ M' проѣзжаетъ разстояніе $A'R = x$ въ теченіи времени $\frac{x}{v'}$. По условію же

задачи M изъ A отправляется h часами раньше, чѣмъ M' изъ A'; слѣдовательно, M потратитъ больше времени на h часовъ чѣмъ M', прежде чѣмъ они встрѣтятся въ точкѣ R. Отсюда составляемъ уравненіе

$$\frac{d + x}{v} - \frac{x}{v'} = h. \qquad (1)$$

При рѣшеніи этого уравненія переносимъ всѣ неизвѣстные члены во 2-ую часть, чтобы намъ не пришлось имѣть дѣла съ отрицательными числами, и окончательно получимъ формулу

$$x = \frac{v\,(d - vh)}{v - v'}. \qquad (\alpha)$$

§ 230. Второй случай.—*Пусть* $v < v'$, $d < vh$. Въ тотъ моментъ, когда курьеръ M' прибываетъ въ A', курьеръ M уже проѣхалъ эту точку, такъ какъ $vh > d$, иначе говоря, онъ былъ раньше въ точкѣ M' и теперь находится впереди; а такъ какъ онъ ѣдетъ медленнѣе M' $(v < v')$, то послѣдній его догонитъ за A' справа. Итакъ, точка встрѣчи находится въ той же части $A'X'$ данной прямой, какъ и въ предыдущемъ случаѣ; поэтому, и уравненіе задачи будетъ такое же (1). Но, чтобы избѣжать отрицательныхъ чиселъ, переносятъ при рѣшеніи этого уравненія всѣ извѣстные члены во 2-ую часть и окончательно находятъ:

$$x = \frac{v'(vh - d)}{v - v'}. \qquad (\beta)$$

§ 231. Третій случай.—*Пусть* $v > v'$, $d < vh$. Въ тотъ моментъ, когда M' прибываетъ въ A', курьеръ M уже проѣхалъ эту точку, такъ какъ $vh > d$; и такъ какъ послѣдній ѣдетъ къ тому же скорѣе, то встрѣчи справа за точкою A' произойти не можетъ. Въ такомъ случаѣ встрѣча должна была произойти раньше разсматриваемаго момента, влѣво отъ A', потому что скорости различны и начало пути такъ же, какъ и конецъ его, неопредѣленно. При этомъ могутъ представиться два случая: или точка встрѣчи будетъ находиться между A и A', въ точкѣ R', или влѣво отъ A, въ точкѣ R''.

Предположимъ сначала, что она находится въ R'. Назовемъ черезъ x разстояніе $A'R'$; тогда разстояніе AR' будетъ равно $(d - x)$. Чтобы составить для этого случая уравненіе, мы будемъ разсуждать такъ: въ нѣкоторый моментъ курьеръ M отправляется изъ точки A и

проѣзжаетъ разстояніе AR' въ теченіе времени $\frac{d-x}{v}$; въ концѣ этого промежутка времени онъ встрѣчаетъ курьера M', который, отправляясь послѣ встрѣчи изъ точки R', проѣзжаетъ разстояніе $R'A'$ въ теченіи времени $\frac{x}{v'}$. Такимъ образомъ, когда этотъ послѣдній курьеръ прибудетъ въ A', пройдетъ времени $\frac{d}{v} - \frac{x}{v} + \frac{x}{v'}$ съ того момента, какъ M отправился изъ A. Уравненіе, поэтому, будетъ

$$\frac{d}{v} - \frac{x}{v} + \frac{x}{v'} = h. \tag{2}$$

Пусть теперь точка встрѣчи будетъ въ R''. Обозначимъ черезъ x разстояніе $A'R''$; тогда разстояніе AR'' будетъ $(x-d)$. Здѣсь можно предположить, что оба курьера отправляются одновременно изъ точки R''; курьеръ M пріѣзжаетъ въ A по истеченіи времени $\frac{x-d}{v}$, а курьеръ M' пріѣзжаетъ въ A' по истеченіи времени $\frac{x}{v'}$. А такъ какъ по условію задачи M' употребитъ на такое путешествіе h часами болѣе, чѣмъ M, то у насъ составится уравненіе

$$\frac{x}{v'} - \frac{x-d}{v} = h \tag{3}$$

Не трудно замѣтить, что уравненія (2) и (3) тождественны, хотя и получены съ помощью различныхъ разсужденій. Въ самомъ дѣлѣ, раздѣляя члены $\frac{d}{v}$ и $\frac{x}{v}$, мы оба уравненія представимъ въ одномъ и томъ же видѣ:

$$\frac{d}{v} - \frac{x}{v} + \frac{x}{v'} = h$$

Итакъ, когда точка встрѣчи лежитъ влѣво отъ A', то гдѣ бы она ни находилась, ея положеніе опредѣлится изъ уравненія (2).

Собирая при рѣшеніи этого уравненія всѣ неизвѣстные члены въ первой части, найдемъ окончательно:

$$x = \frac{v'(vh - d)}{v - v'}. \tag{γ}$$

§ 232. Четвертый случай.—*Пусть* $v < v'$, $d > vh$. Въ тотъ моментъ, когда M' уже прибылъ въ A', курьеръ M еще не доѣхалъ

до этой точки, такъ какъ $vh < d$; иначе говоря, курьеръ M позади M', и такъ какъ онъ ѣдетъ медленнѣе, то встрѣчи вправо отъ A' произойти не можетъ. Въ силу же неравенства ихъ скоростей встрѣча должна была произойти раньше разсматриваемаго момента, влѣво отъ A'. Поэтому уравненіе задачи опять выразится уравненіемъ (2). Только при рѣшеніи его всѣ неизвѣстные члены переносятъ во 2-ую часть и окончательно получаютъ формулу:

$$x = \frac{v'(d - vh)}{v' - v}. \qquad (\delta)$$

§ 233. Изслѣдованіе.—Уравненіе (1) и формулы (α) и (β) относятся къ тѣмъ случаямъ, когда точка встрѣчи находится вправо отъ A'. Но формулы (α) и (β) не будутъ отличаться одна отъ другой, если приложить сюда соглашенія **§ 41**-го, потому что какъ числители, такъ и знаменатели ихъ равны между собою численно, но противоположны по знаку. Поэтому формулу (β) можно отбросить и для двухъ первыхъ случаевъ разсматривать только одну формулу (α).

Уравненіе (2) и формулы (γ) и (δ) прилагаются къ тѣмъ случаямъ, когда точка встрѣчи лежитъ влѣво отъ A'. Но эти двѣ формулы также тождественны, въ силу тѣхъ же соглашеній **§ 41**-го, а потому можно ограничиться формулою (γ) для двухъ послѣднихъ случаевъ.

Съ другой стороны, уравненіе (2) отличается отъ уравненія (1) только перемѣною знака при x; формулы (α) и (γ), имѣя при равныхъ знаменателяхъ числители тоже равные, но противоположные по знаку, также даютъ для x, въ силу соглашеній (**§ 41**), значенія равныя, но противоположныя по знаку.

Слѣдовательно, *уравненіе* (1) *и формула* (α), *служащая для его рѣшеніемъ, прилагаются ко всѣмъ четыремъ случаямъ, если только согласиться отсчитывать влѣво отъ* A' *тѣ длины, измѣряемыя значеніемъ* x, *для которыхъ это послѣднее выйдетъ отрицательнымъ.*

§ 234. Особенные случаи.—До сихъ поръ мы предполагали, что $v \gtreqless v'$, $d \gtreqless vh$. Изслѣдуемъ теперь такіе случаи, гдѣ эти неравенства переходятъ въ равенства.

1. *Пусть* $d = vh$, *а* v *не равно* v'. Формула (α) даетъ: $x = 0$, т.-е. что разстояніе точки встрѣчи до точки A' равно нулю, или, что

одно и то же, *оба курьера находятся одновременно въ* A'. Можно сказать *à priori*, что такъ и должно быть, потому что при $vh = d$ курьеръ M прибываетъ въ A' одновременно съ M'; и въ силу неравенства ихъ скоростей они будутъ находиться вмѣстѣ только въ одной этой точкѣ.

2. *Пусть* $v = v'$, а d *не равно* vh. Формула (α) даетъ $x = \frac{v(d - vh)}{0}$. Такой видъ есть символъ невозможности (**§ 213**); отсюда слѣдуетъ, что *въ этомъ случаѣ курьеры никогда не встрѣтятся*. Въ этомъ также легко убѣдиться *à priori*; въ самомъ дѣлѣ, при d не равномъ vh курьеры не будутъ одновременно въ точкѣ A', и такъ какъ скорости ихъ одинаковы, то разстояніе между ними всегда оставалось и будетъ оставаться безъ измѣненія.

3. *Пусть заразъ* и $v = v'$, и $d = vh$. Формула (α) даетъ: $x = \frac{0}{0}$. Такой видъ есть обыкновенно символъ неопредѣленности. Можно, поэтому, думать, что *въ этомъ случаѣ оба курьера всегда вмѣстѣ*; но слѣдуетъ доказать это *à priori*, что, впрочемъ, не трудно. Въ самомъ дѣлѣ, при $d = vh$ они будутъ находиться вмѣстѣ въ точкѣ A', а такъ какъ скорости ихъ одинаковы, то они всегда были и будутъ вмѣстѣ.

Такимъ образомъ, въ случаяхъ даже особенныхъ, когда и уравненіе, и формула болѣе не существуютъ, можно тѣ символы, съ которыми здѣсь встрѣчаемся, такъ истолковать, что получимъ истинное рѣшеніе.

§ 235. Мы не станемъ продолжать изслѣдованія этой задачи сказаннаго довольно, чтобы намѣтить дальнѣйшій ходъ. Предлагаемъ читателю сдѣлать и другія предположенія: напр., что *курьеръ* M *ѣдетъ въ направленіи отъ* X' *къ* X, или еще, что курьеръ M прибываетъ въ A на h часовъ *позднѣе*, чѣмъ курьеръ M' въ точку A. Составляя непосредственно для каждаго изъ такихъ предположеній уравненіе и выводя формулу, служащую рѣшеніемъ послѣдняго, всегда найдемъ, что уравненіе (1) и формула (α) будутъ приложимы, стоитъ только разсматривать какъ отрицательныя тѣ величины, смыслъ которыхъ измѣненъ на обратный.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Найти соотношеніе между A, B, A', B', при которомъ выраженіе $\frac{Ax+B}{A'x+B'}$ имѣло бы значеніе, не зависящее отъ x.

Отв. $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$ или же $B=0$, $B'=0$.

II. Найти соотношенія между A, B, C, A', B', C', при которыхъ выраженіе $\frac{Ax+By+C}{A'x+B'y+C'}$ имѣло бы значеніе, не зависящее одновременно ни отъ x, ни отъ y. Спрашивается еще, можетъ ли это выраженіе быть независимымъ отъ одного только x, сохраняя свою зависимость отъ y.

Отв. $\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$. Не можетъ зависѣть отъ одного только y.

III. Найти такую ариѳметическую прогрессію, въ которой существовало бы постоянное отношеніе между суммою x первыхъ членовъ и суммою kx слѣдующихъ членовъ, при чемъ k данная величина, а x можетъ принимать всевозможныя цѣлыя значенія *).

Отв. Безчисленное множество подобныхъ прогрессій. Разность ихъ равна удвоенному первому члену.

IV. Изслѣдовать формулы рѣшенія трехъ уравненій съ тремя неизвѣстными. Различаютъ слѣдующіе случаи:

1. Два первыхъ уравненія могутъ быть несовмѣстны, каково бы ни было третье.

Отв. Условія для этого случая:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \text{ и } bk' \quad kb' \gtrless 0.$$

2. Два первыхъ уравненія могутъ быть несовмѣстны съ третьимъ.

Отв. Для этого необходимо, чтобы общій знаменатель равнялся нулю и чтобы числитель одной изъ неизвѣстныхъ былъ отличенъ отъ нуля.

3. Два первыхъ уравненія могутъ заключаться одно въ другомъ.

Отв. Для этого необходимо, чтобы $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{k}{k'}$.

---

*) См. далѣе, главу о прогрессіяхъ (§§ 326—333).

4. Третье уравненіе можетъ входить въ первыя два.

Отв. Для этого необходимо, чтобы общій знаменатель и числитель одной изъ неизвѣстныхъ равнялись нулю.

V. Опредѣлить необходимыя и достаточныя условія, при которыхъ задача § 190-го о резервуарахъ, наполняемыхъ кранами и дождемъ, стала бы невозможною или неопредѣленною. Эти условія выводятся *à priori*

Отв. Условіе невозможности есть $\frac{n}{n'} = \frac{s}{s'}$, и если, кромѣ того, $ns't' = n'st$, то задача неопредѣленна.

VI. Дана система уравненій

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c, \\ a'x + b'y &= c' \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

и предположено, что

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha t + \beta u, \\ y &= \alpha' t + \beta' u \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Подставляя эти значенія x и y въ данныя уравненія, получаемъ два уравненія съ неизвѣстными t и u. Доказать, что знаменатель значеній t и u, выводимыхъ изъ полученныхъ такимъ образомъ уравненій, есть произведеніе знаменателей, которые мы получаемъ, рѣшая систему (1) относительно x и y, а систему (2) относительно t и u.

VII. Та же самая задача относительно системы съ тремя неизвѣстными

$$\left.\begin{aligned} ax + by + cz &= k, \\ a'x + b'y + c'z &= k', \\ a''x + b''y + c''z &= k''. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

гдѣ предположено, что

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha t + \beta u + \gamma v, \\ y &= \alpha' t + \beta' u + \gamma' v, \\ z &= \alpha'' t + \beta'' u + \gamma'' v. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эти два упражненія ничего другого не представляютъ, кромѣ простыхъ повѣрочныхъ вычисленій.

КНИГА III

Уравненія второй степени

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Уравненія второй степени съ одною неизвѣстною

§ 236. Общій видъ уравненія съ одною неизвѣстною. — Уравненіе съ одною неизвѣстною x будетъ уравненіемъ второй степени (или квадратнымъ), если обѣ части его, будучи цѣлыми относительно x, содержатъ квадратъ неизвѣстной, но не содержатъ болѣе высшей ея степени. Слѣдовательно, такое уравненіе можетъ заключать въ себѣ члены только трехъ видовъ: члены, содержащіе квадратъ x, члены, содержащіе первую степень x, и члены, независящіе отъ x. Поэтому, перенеся всѣ члены въ первую часть и соединивъ въ одинъ всѣ члены, содержащіе x^2, также въ одинъ — всѣ члены, содержащіе x, и также въ одинъ — всѣ извѣстные члены, приведемъ уравненіе къ *общему виду*:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

гдѣ a, b, c — данныя числа, положительныя или отрицательныя. Напр., уравненіе

$$3x - \frac{2}{5} + \frac{x^2}{9} - 8 + \frac{2x^2}{3} - \frac{26x}{15}$$

преобразовывается послѣдовательно въ такія уравненія:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{2x^2}{3} + 3x + \frac{26x}{15} - 8 - \frac{2}{5} = 0,$$

$$5x^2 - 30x^2 + 135x + 78x - 360 - 18 = 0,$$

$$-25x^2 + 213x - 378 = 0,$$

$$25x^2 - 213x + 378 = 0.$$

Рѣшенія уравненія второй степени называются его *корнями*. Коэффиціентъ a не можетъ быть равенъ нулю, такъ какъ тогда уравненіе перестало бы быть квадратнымъ, но коэффиціенты b и c могутъ быть равны нулю. Въ послѣднемъ случаѣ уравненіе принимаетъ одинъ изъ двухъ слѣдующихъ видовъ:

$$ax^2 + c = 0, \quad ax^2 + bx = 0$$

и называется неполнымъ.

I. Рѣшеніе уравненія второй степени

§ 237. Случай, когда уравненіе — вида: $ax^2 + c = 0$. — Уравненіе

$$ax^2 + c = 0 \tag{1}$$

можно разсматривать, какъ уравненіе первой степени относительно неизвѣстной x^2, опредѣляя которую, находимъ:

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Слѣдовательно, если $\left(-\frac{c}{a}\right)$ — *положительное число*, то оно представляетъ квадратъ неизвѣстной, а потому x равно квадратному корню изъ $\left(-\frac{c}{a}\right)$; этотъ корень имѣетъ два значенія (**§ 96**), численно равныхъ, но противоположныхъ по знаку; слѣдовательно, уравненіе *имѣетъ два рѣшенія*:

$$x' = +\sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x'' = -\sqrt{-\frac{c}{a}}. \tag{2}$$

Если же, наоборотъ, $\left(-\frac{c}{a}\right)$ — *отрицательное число*, то не существуетъ ни положительнаго, ни отрицательнаго числа, квадратъ котораго былъ бы равенъ $\left(-\frac{c}{a}\right)$ (**§ 96**); *слѣдовательно, уравненіе* (1) *не имѣетъ рѣшенія*. Но всё-таки въ этомъ случаѣ говорятъ, что *оно имѣетъ два мнимыхъ корня*, выражаемыхъ формулами (2).

§ 238. Случай, когда уравненіе — вида: $ax^2 + bx = 0$. — Если членъ, независимый отъ x, равенъ нулю, уравненіе приметъ видъ:

$$ax^2 + bx = 0, \tag{1}$$

или, послѣ вынесенія за скобки общаго множителя x,

$$x(ax+b)=0.$$

Чтобы произведеніе двухъ множителей было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы одинъ изъ множителей былъ равенъ нулю; слѣдовательно, рѣшая уравненія первой степени:

$$x=0,\quad ax+b=0,$$

получимъ всѣ рѣшенія даннаго уравненія. Послѣднія уравненія удовлетворяются соотвѣтственно значеніями:

$$x'=0,\quad x''=-\frac{b}{a};\qquad (2)$$

итакъ, данное *уравненіе имѣетъ два корня, одинъ изъ которыхъ всегда равенъ нулю.*

§ 239. Рѣшеніе полнаго уравненія. — Разсмотримъ теперь полное уравненіе

$$ax^2+bx+c=0.\qquad (1)$$

Чтобы рѣшить это уравненіе, приведемъ его сначала къ виду уравненія (1) **§ 237**-го, первая часть котораго есть полный квадратъ, содержащій неизвѣстную, а вторая вполнѣ извѣстна. Для этой цѣли умножаемъ обѣ части на $4a$, на что имѣемъ право по **§ 122**-му, такъ какъ a не равно нулю. Перенеся затѣмъ $4ac$ во вторую часть, получимъ равносильное уравненіе

$$4a^2x^2+4abx=-4ac.$$

Не трудно замѣтить, что первая часть его представляетъ два первыхъ члена квадрата бинома $2ax+b$, до полнаго квадрата котораго не хватаетъ только b^2. Прибавляя къ обѣимъ частямъ уравненія по b^2, получаемъ:

$$4a^2x^2+4abx+b^2=b^2-4ac,\quad \text{или}\quad (2ax+b)^2=b^2-4ac.$$

Послѣднее уравненіе имѣетъ искомый видъ: (b^2-4ac) представляетъ квадратъ $(2ax+b)$. *Слѣдовательно, если выраженіе* (b^2-4ac) *положительно,* то $(2ax+b)$ равно квадратному корню изъ него и будетъ имѣть два значенія, численно равныхъ, но противоположныхъ по знаку, т.-е. у насъ получится безразлично:

$$2ax+b=+\sqrt{b^2-4ac},\quad 2ax+b=-\sqrt{b^2-4ac}.$$

Это — уравненія первой степени, рѣшивъ которыя, получимъ:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Итакъ, данное уравненіе имѣетъ два рѣшенія. Эти два рѣшенія обыкновенно изображаютъ одною формулой:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{2}$$

понимая подъ $+\sqrt{b^2 - 4ac}$ положительное значеніе радикала, а подъ $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ отрицательное.

Если, напротивъ, $(b^2 - 4ac)$ отрицательно, то $\sqrt{b^2 - 4ac}$ въ силу нашихъ соглашеній не представляетъ ни положительнаго, ни отрицательнаго числа, и *предложенное уравненіе не имѣетъ никакого рѣшенія.* Однако, въ этомъ случаѣ говорятъ, что *оно имѣетъ два мнимыхъ корня*, изображаемыхъ формулою (2).

Можетъ случиться, что $(b^2 - 4ac)$ равно нулю; тогда оба значенія $\sqrt{b^2 - 4ac}$ приводятся къ нулю; уравненіе обращается въ слѣдующее: $(2ax + b)^2 = 0$, и оба корня принимаютъ одно и то же значеніе: $x = -\frac{b}{2a}$. *Слѣдовательно, уравненіе имѣетъ только одно рѣшеніе.* Но и въ этомъ случаѣ говорятъ, что *уравненіе имѣетъ два корня, но только равныхъ между собою.*

§ 240. Уравненіе второй степени всегда имѣетъ два корня. — На основаніи предыдущаго заключаемъ, что уравненіе второй степени имѣетъ иногда два рѣшенія, иногда одно, а иногда совсѣмъ не имѣетъ рѣшеній. Но говорятъ, что оно всегда имѣетъ два рѣшенія, которыя могутъ быть вещественными и различными и, вещественными и равными, или, наконецъ, мнимыми. На первый взглядъ можетъ показаться страннымъ такое желаніе утверждать, что во всѣхъ случаяхъ, даже и тогда, когда нѣтъ корней, существуютъ именно два корня. Но это установленіе двухъ корней и введеніе въ вычисленія мнимыхъ чиселъ являются слѣдствіемъ духа обобщенія, господствующаго въ алгебрѣ. Дѣйствительно, еслибы видъ результатовъ измѣнялся вмѣстѣ съ численнымъ значеніемъ буквъ, то было бы невозможно производить дѣйствія надъ *буквенными* количествами; пришлось бы постоянно раздѣлять и подраздѣлять вопросы, чтобы получить формулы, соотвѣтствующія тому или

другому предположенію. Введеніе отрицательныхъ и мнимыхъ чиселъ имѣетъ цѣлью устранить это неудобство. Въ частномъ вопросѣ введеніе этихъ чиселъ не принесло бы никакой пользы, но при общемъ изученіи цѣлаго класса вопросовъ эти числа даютъ возможность выразить и доказать разъ навсегда правила и результаты, которые въ противномъ случаѣ потребовали бы доказательствъ и формулъ, различныхъ для разныхъ вопросовъ одного и того же класса.

§ 241. Опредѣленіе мнимаго выраженія. — *Мнимымъ выраженіемъ* называютъ, вообще, квадратный корень изъ отрицательнаго числа. Съ этимъ выраженіемъ не слѣдуетъ связывать никакой идеи относительно измѣренія величинъ. Мнимое выраженіе, какъ и отрицательное число, не представляетъ никакой величины; но дѣйствія надъ мнимыми выраженіями такъ же, какъ и надъ отрицательными, благодаря соглашеніямъ, принимаютъ условный смыслъ и становятся драгоцѣннымъ средствомъ для обобщенія.

Первое изъ соглашеній состоитъ въ томъ, что квадратъ выраженія $\sqrt{-A}$ *равенъ* $-A$.

Для опредѣленія другихъ дѣйствій соглашаемся примѣнять къ мнимымъ выраженіямъ всѣ правила, доказанныя вообще для вещественныхъ количествъ (*вещественными* называются положительныя и отрицательныя числа).

242. Видъ мнимыхъ корней уравненія второй степени.—Мнимые корни уравненія второй степени, на основаніи предыдущаго, будутъ выраженіями вида $A+\sqrt{-B}$, гдѣ B положительное число. Обозначивъ квадратный корень изъ B черезъ b, такъ что $B=b^2$, можемъ разсматриваемое выраженіе написать слѣдующимъ образомъ: $A+\sqrt{-b^2}$, или $A+\sqrt{b^2\times(-1)}$. Такъ какъ мы согласились прилагать къ дѣйствіямъ надъ мнимыми выраженіями всѣ правила, доказанныя вообще для вещественныхъ чиселъ, то можемъ, поэтому, вывести изъ подъ знака радикала множитель b^2, какъ будто бы мы извлекаемъ корень изъ положительнаго произведенія. Такимъ образомъ, разсматриваемое выраженіе представимъ въ видѣ:

$$A+b\sqrt{-1}.$$

Поэтому, въ мнимое выраженіе войдетъ только одинъ мнимый множитель $\sqrt{-1}$. Его опредѣляютъ, говоря, что квадратъ его равенъ -1.

Вообще, какъ мы сказали, правила, доказанныя для вещественныхъ чиселъ, будутъ служить для мнимыхъ выраженій опредѣленіями дѣйствій, которыя до введенія опредѣленій не имѣли бы никакого смысла.

§ 243. Правило.—Формула (2) даетъ, во всѣхъ случаяхъ, корни уравненія (1). Она показываетъ, что *для полученія ихъ надо взять коэффиціентъ при x съ обратнымъ знакомъ, прибавить къ нему (для полученія одного корня) и вычесть изъ него (для полученія другого корня) квадратный корень изъ разности между квадратомъ этого коэффиціента и учетвереннымъ произведеніемъ коэффиціента при x^2 на членъ, независящій отъ x; наконецъ, полученные результаты раздѣлить на удвоенный коэффиціентъ при x^2.*

§ 244. Упрощеніе.—Иногда какъ эту формулу, такъ и выражаемое ею правило легко упростить.

1. Часто коэффиціентъ при x^2 бываетъ равенъ единицѣ; къ такому виду мы даже всегда можемъ привести квадратное уравненіе, раздѣливъ обѣ его части на a. Уравненіе принимаетъ тогда видъ:

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (3)$$

Можно непосредственно рѣшить это уравненіе, перенося q во вторую часть, прибавляя затѣмъ къ обѣимъ частямъ по $\frac{p^2}{4}$ и изъ полученныхъ результатовъ извлекая квадратный корень, какъ это мы сдѣлали въ § 239-мъ. Но проще вывести новую формулу изъ формулы (2), полагая въ послѣдней $a = 1$, $b = p$, $c = q$; формула приметъ видъ:

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

или, послѣ раздѣленія радикала на 2,

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \qquad (4)$$

Слѣдуетъ запомнить послѣднюю формулу для тѣхъ случаевъ, когда $a = 1$. Она показываетъ, что *для рѣшенія уравненія* (3) *надо взять половину коэффиціента при x съ обратнымъ знакомъ и затѣмъ прибавить и вычесть послѣдовательно квадратный корень изъ разности между квадратомъ этой половины и извѣстнымъ членомъ.*

2. Можетъ случиться, что коэффиціентъ b при x — четный. Если мы множитель 2 введемъ явно, полагая $b = 2k$, то уравненіе (1) приметъ видъ:

$$ax^2 + 2kx + c = 0. \tag{5}$$

Это уравненіе можно также рѣшить непосредственно по методу **§ 239**-го, умноживъ обѣ части на a и составивъ въ первой части квадратъ выраженія $(ax + k)$. Но проще положить въ формулѣ (2) $b = 2k$, послѣ чего она приметъ видъ:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a},$$

или, по раздѣленіи числителя и знаменателя на 2,

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \tag{6}$$

Такимъ образомъ, *для нахожденія корней въ этомъ случаѣ надо взять половину коэффиціента при x съ обратнымъ знакомъ, прибавить и вычесть квадратный корень изъ разности между квадратомъ этой половины и произведеніемъ коэффиціента при x^2 на членъ, независящій отъ x, и раздѣлить полученные результаты на коэффиціентъ при x^2*. Всегда слѣдуетъ пользоваться этимъ упрощеніемъ, когда представляется къ тому случай.

§ 245. Приложенія. — 1. Пусть дано уравненіе

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Имѣемъ.

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2}; \quad \begin{cases} x' = \frac{7}{2} + \frac{3}{2} = 5, \\ x'' = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2 \end{cases}$$

2. Дано уравненіе

$$3x^2 + 14x - 440 = 0.$$

Рѣшая его, находимъ:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 1.440}}{3} = \frac{-7 \pm \sqrt{1369}}{3} = \frac{-7 \pm 37}{3}; \quad \begin{cases} x' = \frac{-7 + 37}{3} = 10, \\ x'' = \frac{-7 - 37}{3} = -\frac{44}{3}. \end{cases}$$

3. Дано уравненіе

$$7x^2 - 13x + 3 = 0.$$

Имѣемъ.

$$x=\frac{13\pm\sqrt{169-4.7.3}}{14}=\frac{13\pm\sqrt{85}}{14};\quad \begin{cases} x'=\dfrac{13+\sqrt{85}}{14}, \\ x''=\dfrac{13-\sqrt{85}}{14} \end{cases}$$

4. Дано уравненіе

$$x^2-6x+9=0$$

Имѣемъ:

$$x=3\pm\sqrt{9-9}=3;\quad \begin{cases} x'=3, \\ x''=3. \end{cases}$$

слѣдовательно, уравненіе имѣетъ равные корни.

5. Дано уравненіе

$$2x^2-11x+20=0$$

Рѣшая его, находимъ:

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-4.2.20}}{4}=\frac{11\pm\sqrt{-39}}{4},\quad \begin{cases} x'=\dfrac{11+\sqrt{39}.\sqrt{-1}}{4}, \\ x''=\dfrac{11-\sqrt{39}.\sqrt{-1}}{4}; \end{cases}$$

слѣдовательно, корни уравненія—мнимые.

6. Дано буквенное уравненіе

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}.$$

Освободивъ уравненіе отъ знаменателей, перенеся всѣ члены въ одну часть и сдѣлавъ приведеніе подобныхъ членовъ, находимъ:

$$(a-b)^2x^2-(a^2+b^2)(a+b)x+ab(a+b)^2=0,$$

откуда

$$x=\frac{(a^2+b^2)(a+b)\pm\sqrt{(a^2+b^2)^2(a+b)^2-4ab(a+b)^2(a-b)^2}}{2(a-b)^2},$$

или

$$x=\frac{(a+b)\left\{a^2+b^2\pm\sqrt{(a-b)^4+4a^2b^2}\right\}}{2(a-b)^2}.$$

II. Изслѣдованіе формулъ

§ 246. Случай, когда корни вещественные и неравные.— Мы видѣли, что уравненіе (1) имѣетъ два вещественныхъ и различныхъ корня:

$$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\quad x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

если (b^2-4ac) положительно.

Всегда можно принять, что a положительно, такъ какъ, въ противномъ случаѣ, измѣнивъ знаки у всѣхъ членовъ уравненія, мы всё-же сдѣлаемъ коэффиціентъ при x^2 положительнымъ. Слѣдовательно, знаменатель обоихъ корней можно считать положительнымъ, а потому знакъ каждаго изъ корней одинаковъ со знакомъ его числителя.

Членъ c можетъ быть или положительнымъ, или равнымъ нулю, или отрицательнымъ. *Если c положительно,* то (b^2-4ac) меньше b^2, а потому $\sqrt{b^2-4ac}$ меньше абсолютнаго значенія b; слѣдовательно, знакъ числителей одинаковъ со знакомъ члена $(-b)$: въ этомъ случаѣ *оба корня имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, одинаковый со знакомъ $(-b)$. Если c отрицательно,* то (b^2-4ac) больше b^2, т.-е. радикалъ больше абсолютнаго значенія количества, предшествующаго ему; поэтому, знакъ каждаго радикала будетъ въ то же время и знакомъ соотвѣтствующаго числителя: *слѣдовательно, корни имѣютъ противоположные знаки;* и наибольшимъ, по численному значенію, будетъ x', если b положительно, и x'', если b отрицательно. *Наконецъ, въ томъ особенномъ случаѣ, когда* $c=0$, радикалъ $\sqrt{b^2-4ac}$ равенъ абсолютному значенію b; слѣдовательно, $x'=-\frac{b}{a}$ и $x''=0$, *если b положительно, и* $x'=0$, $x''=-\frac{b}{a}$, *если b отрицательно.*

§ 247. Случай, когда корни вещественные и равные. — *Если* $b^2-4ac=0$, то, какъ извѣстно, каждый изъ корней равенъ одному и тому же количеству $\left(-\frac{b}{2a}\right)$; *слѣдовательно, корни имѣютъ знакъ, противоположный знаку b.*

Замѣтимъ, что въ этомъ случаѣ общее уравненіе (1) можетъ быть написано такимъ образомъ:

$$ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}=0,\quad \text{или}\quad a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Первая часть этого уравненія есть полный квадратъ, умноженный на a.

§ 248. Случай, когда корни мнимые. — *Если (b^2-4ac) отрицательно,* то, какъ извѣстно, корни — мнимые; положивъ $-\frac{b}{2a}=\alpha$ и $\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}=\beta$, мы можемъ представить ихъ въ видѣ:

$$x'=\alpha-\beta\sqrt{-1},\quad x''=\alpha+\beta\sqrt{-1}.$$

Въ этомъ случаѣ первая часть уравненія можетъ быть приведена къ виду, замѣтить который весьма полезно. Въ самомъ дѣлѣ, очевидно:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right).$$

Но три первые члена въ скобкахъ составляютъ квадратъ выраженія $\left(x+\frac{b}{2a}\right)$, а два послѣдніе приводятся къ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$; слѣдовательно, уравненіе можетъ быть представлено въ видѣ:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0.$$

А такъ какъ $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ положительное число, то его можно разсматривать, какъ квадратъ квадратнаго корня изъ него же; значитъ, можно написать:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\right)^2\right]=0.$$

Такимъ образомъ, *первая часть уравненія есть произведеніе суммы квадратовъ двухъ вещественныхъ выраженій на* a.

Этотъ видъ ясно показываетъ, почему въ этомъ случаѣ уравненіе не имѣетъ никакого рѣшенія: въ самомъ дѣлѣ, ни при какомъ положительномъ или отрицательномъ значеніи x первая часть уравненія не можетъ обратиться въ нуль.

§ 249. Таблица изслѣдованія.—Предыдущее изслѣдованіе можно сжато представить въ слѣдующей таблицѣ:

$b^2-4ac>0$, 2 вещественныхъ и неравныхъ корня.	$c>0$	$b<0$, два положительныхъ корня,
		$b>0$, два отрицательныхъ корня.
	$c=0$	одинъ корень равенъ нулю, другой $-\frac{b}{a}$
	$c<0$	два корня съ различными знаками.

$b^2-4ac=0$, 2 вещественныхъ и равныхъ корня.	$x'=x''=-\frac{b}{2a}$	первая часть уравненія представляетъ полный квадратъ.

$b^2 - 4ac < 0$, 2 мнимыхъ корня. $\begin{cases} x' = \alpha - \beta\sqrt{-1} \\ x'' = \alpha + \beta\sqrt{-1} \end{cases}$ первая часть уравненія представляетъ сумму двухъ квадратовъ.

§ 250. Замѣчаніе.—1. Если a и c — съ различными знаками, то корни всегда вещественные: въ этомъ случаѣ $(b^2 - 4ac)$ представляетъ сумму, всегда положительную.

2. Чтобы корни различались между собою только знаками, необходимо и достаточно, чтобы $b = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, если α и $-\alpha$ представляютъ два корня, то у насъ должно быть одновременно:

$$\begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0. \\ a\alpha^2 - b\alpha + c = 0, \end{cases}$$

откуда посредствомъ вычитанія выводимъ.

$$2b\alpha = 0,$$

или, такъ какъ α не равно нулю,

$$b = 0.$$

Это условіе, очевидно, и достаточно.

III. Свойства корней

§ 251. Теорема I. — *Сумма корней квадратнаго уравненія равна частному съ обратнымъ знакомъ отъ дѣленія коэффиціента при x на коэффиціентъ при x^2.*

Въ самомъ дѣлѣ, складывая формулы (2) **§ 239**-го, получаемъ:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

§ 252. Теорема II. — *Произведеніе корней равно частному отъ дѣленія извѣстнаго члена на коэффиціентъ при x^2.*

Въ самомъ дѣлѣ, перемноживъ почленно тѣ же формулы (2), получимъ:

$$x'x'' = \frac{(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2},$$

или

$$x'x'' = \frac{c}{a}. \qquad (2)$$

§ 253. Замѣчаніе. — Эти двѣ теоремы можно доказать *à priori*. Дѣйствительно, если x' и x'' представляютъ корни уравненія

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то у насъ будутъ тождества:

$$\begin{cases} ax'^2 + bx' + c = 0, \\ ax''^2 + bx'' + c = 0. \end{cases}$$

Вычитая по-членно нижнее тождество изъ верхняго, получаемъ:

$$a(x'^2 - x''^2) + b(x' - x'') = 0;$$

раздѣливъ же полученное равенство на $(x' - x'')$, мы можемъ написать:

$$a(x' + x'') + b = 0,$$

откуда

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}. \qquad (1)$$

Замѣняя въ первомъ изъ предыдущихъ тождествъ b выраженіемъ $-a(x' + x'')$, имѣемъ:

$$ax'^2 - a(x' + x'')x' + c = 0,$$

откуда

$$x'x'' = \frac{c}{a}. \qquad (2)$$

Эти двѣ теоремы очень важны по многочисленнымъ приложеніямъ, на нѣкоторыя изъ которыхъ мы теперь и укажемъ.

§ 254. Разложеніе первой части квадратнаго уравненія на множителей первой степени. — Если x' и x'' корни уравненія

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

то по **§ 253**-му

$$x' + x'' = -\frac{b}{a}, \quad x'x'' = \frac{c}{a}.$$

Раздѣливъ обѣ части уравненія (1) на a и замѣнивъ $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ ихъ предыдущими значеніями, мы первую часть представимъ въ видѣ:

$$x^2 - (x' + x'')x + x'x'',$$

или, что то же самое, въ видѣ:

$$(x - x')(x - x'').$$

Такимъ образомъ, *первая часть квадратнаго уравненія, представленнаго подъ видомъ*:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

есть произведеніе двухъ биномовъ первой степени, равныхъ избыткамъ количества x надъ каждымъ изъ корней.

Если данное уравненіе имѣетъ видъ:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то предыдущее разсужденіе можетъ быть приложено только послѣ раздѣленія уравненія на a; и, слѣдовательно, до дѣленія *первая часть даннаго уравненія равна*

$$a(x - x')(x - x'').$$

§ 255. Разложеніе трехчлена второй степени на множителей первой степени. — Предыдущая теорема непосредственно прилагается къ разложенію трехчлена второй степени, но разложеніе это можно произвести и прямо, съ помощью совсѣмъ другого пріема.

Въ самомъ дѣлѣ, имѣемъ тождественно:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right]; \quad (1)$$

замѣнивъ же здѣсь $\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$ равнымъ ему тождественно выраженіемъ:

$$-\left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2,$$

представимъ разсматриваемый трехчленъ въ видѣ произведенія a на разность двухъ квадратовъ:

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}\right)^2\right].$$

А такъ какъ разность двухъ квадратовъ равна произведенію суммы основаній на ихъ разность, то предыдущее выраженіе, равносильное ax^2+bx+c, можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$a\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\right),$$

или, что одно и то же,

$$a\left(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right);$$

послѣднее выраженіе, очевидно, совпадаетъ съ найденнымъ выше:

$$a(x-x')(x-x'').$$

Эта формула, какимъ бы образомъ она ни была получена, очевидно, приложима къ случаю, когда x' и x'' — мнимые (**§ 241**); но тогда оба множителя, $(x-x')$, $(x-x'')$, не имѣютъ никакого ариѳметическаго значенія, и намъ не представится случая воспользоваться ими.

Обыкновенно, *корнями трехчлена* ax^2+bx+c называютъ такія числа, которыя, будучи подставлены вмѣсто x, обращаютъ трехчленъ въ нуль, т.-е. корни даннаго трехчлена суть корни уравненія

$$ax^2+bx+c=0.$$

Поэтому, *чтобы разложить трехчленъ на множителей первой степени, находятъ его корни, каждый изъ нихъ вычитаютъ изъ x и произведеніе полученныхъ разностей умножаютъ на a.*

§ 256. Задача.—Свойства корней, изложенныя въ **§ 253**-мъ, непосредственно даютъ уравненіе 2-ой степени для рѣшенія слѣдующей задачи: *Найти два числа, зная ихъ сумму и произведеніе.*

Дѣйствительно, пусть S есть сумма двухъ чиселъ, а P — ихъ произведеніе; эти два числа суть корни уравненія

$$x^2-Sx+P=0,$$

такъ какъ сумма этихъ корней равна S, а произведеніе равно P.

Къ тому же, легко представить уравненіе въ такомъ видѣ, что можно будетъ выяснить *à priori* смыслъ этого явленія; въ самомъ дѣлѣ, уравненіе можно написать такъ:

$$P=Sx-x^2, \quad \text{или} \quad P=x(S-x),$$

откуда видно, что рѣшить это уравненіе значитъ найти два числа x и $S-x$, произведеніе которыхъ было бы P, а сумма $x+S-x$ равнялась бы S.

§ 257. Опредѣленіе, à priori, знаковъ корней.—Соотношенія, дающія сумму и произведеніе обоихъ корней (**§ 253**), даютъ возможность опредѣлить ихъ знаки, не рѣшая самого уравненія.

Въ самомъ дѣлѣ, знакъ произведенія корней $\frac{c}{a}$ покажетъ, будутъ ли корни одного знака, или же различныхъ. Въ первомъ случаѣ по знаку суммы корней $-\frac{b}{a}$ опредѣлимъ, будутъ ли оба корня положительны, или оба отрицательны. Во второмъ случаѣ, когда одинъ корень положителенъ, а другой отрицателенъ, знакъ $-\frac{b}{a}$ будетъ одинаковъ со знакомъ того корня, абсолютная величина котораго больше. Такъ, напр., корни уравненія

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

будутъ различныхъ знаковъ, потому что ихъ произведеніе равно -4, и положительный корень по абсолютной величинѣ больше, такъ какъ сумма корней положительна и равна 3.

§ 258. Замѣчаніе. — *Прежде чѣмъ прилагать предыдущія правила, надо убѣдиться, что корни вещественны.* Разсматривая, напр., уравненіе

$$x^2 - 3x + 10 = 0,$$

мы по **§ 253**-му пришли бы къ заключенію, что оба корня положительны, такъ какъ ихъ произведеніе 10 и сумма 3 представляютъ положительныя числа, а это въ данномъ случаѣ не имѣло бы смысла, потому что выраженіе $(b^2 - 4ac)$ равно здѣсь -31 и корни мнимые.

§ 259. Задача.—Теорема **§ 255**-го, которою, къ слову сказать, постоянно пользуются въ анализѣ, даетъ возможность непосредственно рѣшить слѣдующій вопросъ: *составить уравненіе второй степени, корни котораго были бы равны даннымъ числамъ* α и β.

Искомое уравненіе, очевидно, будетъ

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0, \quad \text{или} \quad x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0;$$

при этомъ *à priori* видно, что первая часть $(x-\alpha)(x-\beta)$, дѣйствительно, обращается въ нуль при $x=\alpha$ и $x=\beta$. Также видно, что коэффиціентъ при x равенъ суммѣ корней, взятыхъ съ обратнымъ знакомъ, и что извѣстный членъ равенъ произведенію корней.

Примѣры: 1) *Составить уравненіе второй степени, корни котораго равны*

$$2+\sqrt{3} \text{ и } 2-\sqrt{3}.$$

Сумма корней:

$$2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4;$$

произведеніе ихъ:

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1.$$

Слѣдовательно, искомое уравненіе:

$$x^2-4x+1=0.$$

2) Уравненіе второй степени, корни котораго $(a+b)$ и $(a-b)$, имѣетъ видъ:

$$x^2-2ax+a^2-b^2=0$$

IV. Изслѣдованіе одного замѣчательнаго частнаго случая

§ 260. Случай, когда $a=0$.—Если предположить, что въ уравненіи $ax^2+bx+c=0$ коэффиціентъ a равенъ нулю, то формулы

$$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \quad x''=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

примутъ видъ:

$$x'=\frac{-b-\sqrt{b^2}}{0}, \quad x''=\frac{-b+\sqrt{b^2}}{0};$$

иначе говоря, если b положительно, то

$$x'=\frac{-2b}{0}, \quad x''=\frac{0}{0},$$

а если b отрицательно, то

$$x'=\frac{0}{0}, \quad x''=\frac{-2b}{0}.$$

Такимъ образомъ, одинъ изъ корней принимаетъ неопредѣленный видъ, а другой—безконечный. Съ другой стороны, разсматриваемое уравненіе при $a = 0$ обращается въ

$$bx + c = 0;$$

это —уравненіе первой степени и имѣетъ только одно рѣшеніе:

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ общія формулы, повидимому, не имѣютъ мѣста.

Предварительно замѣтимъ, что еслибы это дѣйствительно было такъ, то все же ничего нельзя было бы возразить противъ разсужденій, приведшихъ къ такому результату, потому что они велись какъ разъ при томъ условіи, что a не равно нулю (§ 239).

Однако, такъ какъ значенія x' и x'' удовлетворяютъ данному уравненію при всякомъ a, то, когда a стремится къ нулю, одно изъ нихъ должно приближаться къ рѣшенію уравненія

$$bx + c = 0.$$

Очевидно, что это есть корень, принимающій видъ $\frac{0}{0}$. Въ самомъ дѣлѣ, разсмотримъ для опредѣленности частный случай: напр., когда b положительно. Тогда умножая числителя и знаменателя дроби

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

на выраженіе $(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})$, не обращающееся въ нуль при $a = 0$, пишемъ:

$$x'' = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})};$$

въ числителѣ стоитъ произведеніе суммы $(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})$ двухъ чиселъ на ихъ разность $(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})$, что даетъ разность квадратовъ этихъ чиселъ, т.-е. будетъ:

$$x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{4ac}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}},$$

отсюда видно, что когда a стремится къ нулю, x'' приближается къ $-\frac{2c}{2b}$ или, что то же самое, $-\frac{c}{b}$.

Что же касается значенія x', то, очевидно, оно увеличивается безпредѣльно въ то время, какъ a уменьшается, потому что числитель стремится къ $-2b$, а знаменатель къ нулю.

V. Рѣшеніе уравненія $ax^2+bx+c=0$, когда a очень мало

§ 261. Величина корней. — *Если a очень мало сравнительно съ b и c, то одинъ изъ корней очень мало отличается отъ $-\frac{c}{b}$, а другой чрезвычайно великъ.* Это предложеніе, очевидно, вытекаетъ изъ того, что, когда a стремится къ нулю, одинъ изъ корней стремится къ $-\frac{c}{b}$, а другой безпредѣльно возрастаетъ (§ 260).

Въ этомъ можно убѣдиться, представляя разсматриваемое уравненіе въ видѣ:

$$\frac{1}{x}\left(b+\frac{c}{x}\right)=-a.$$

Дѣйствительно, такъ какъ вторая часть очень мала, то удовлетворить этому уравненію можно, придавая x тако значееніе, чтобы одинъ изъ множителей въ первой части сталъ бы очень малъ, а другой не сдѣлался бы въ то же время очень великъ. Для этого достаточно выбрать для x очень большое значеніе, такъ какъ тогда множитель $\frac{1}{x}$ будетъ очень малъ, а множитель $\left(b+\frac{c}{x}\right)$ будетъ незначительно отличаться отъ b; или же можно взять для x значеніе близкое къ $-\frac{c}{b}$, такъ какъ тогда второй множитель сдѣлается очень малъ, между тѣмъ какъ первый будетъ незначительно отличаться отъ $-\frac{b}{c}$.

§ 262. Неудобство обыкновенныхъ формулъ. — Общая формула

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac},$$

выражающая корни уравненія $ax^2+bx+c=0$, мало пригодна для численныхъ вычисленій, когда коэффиціентъ a очень малъ

сравнительно съ b и c. Въ самомъ дѣлѣ, понятно, что, вычисливъ съ приближеніемъ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ и раздѣливъ затѣмъ результатъ на $2a$, мы въ то же время раздѣлимъ и ошибку, которая отъ этого значительно увеличится. Итакъ, надлежитъ въ этомъ случаѣ преобразовать формулу для корней.

§ 263. Вычисленіе наименьшаго изъ корней. — Займемся только тѣмъ корнемъ, который мало отличается отъ $-\frac{c}{b}$. Другой корень опредѣлится потомъ безъ труда, такъ какъ сумма обоихъ корней извѣстна и равна $-\frac{b}{a}$.

Изъ уравненія

$$ax^2 + bx + c = 0$$

выводимъ:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}. \qquad (1)$$

По предположенію же a очень мало, а x и b не очень большія и не очень малыя числа: слѣдовательно, значеніе $\frac{ax^2}{b}$ очень мало; поэтому мы можемъ имъ пренебречь и принять за *первое приближеніе*

$$x_1 = -\frac{c}{b}. \qquad (2)$$

При этомъ мы дѣлаемъ ошибку, равную $\frac{ax^2}{b}$, она содержитъ множителемъ первую степень a; поэтому говорятъ, что ошибка есть малая величина *перваго порядка*.

Обозначая черезъ α_1 ошибку, при $x = -\frac{c}{b}$, мы можемъ точную формулу получить тогда въ такомъ видѣ:

$$x = -\frac{c}{b} + \alpha_1. \qquad (3)$$

Послѣ подстановки этого значенія во вторую часть уравненія (1) будемъ имѣть:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} + \alpha_1\right)^2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \frac{2a\alpha_1 c}{b^2} - \frac{a\alpha_1^2}{b}; \qquad (4)$$

отбрасывая во второй части третій и четвертый члены, содержащіе множителями $a\alpha_1$ и $a\alpha_1^2$, получимъ, какъ *второе приближеніе*,

$$x_2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}. \qquad (5)$$

Такъ какъ α_1 — перваго порядка относительно a, то $a\alpha_1$ и $a\alpha_1^2$ соотвѣтственно второго и третьяго порядка относительно того же a, т.-е. они содержатъ множителями соотвѣтственно a^2 и a^3; поэтому, второе приближеніе, выражаемое формулою (5), даетъ ошибки только *второго порядка*. Слѣдовательно, если мы положимъ

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \alpha_2, \qquad (6)$$

то α_2 въ этой формулѣ будетъ малою величиною второго порядка, иначе говоря, выраженіе для α_2 будетъ содержать множителемъ a^2.

Подставивъ во вторую часть формулы (1) значеніе x по формулѣ (6), получимъ:

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} + \alpha_2\right)^2, \qquad (7)$$

или, по раскрытіи скобокъ,

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{a^3c^4}{b^7} + 2\alpha_2\frac{a}{b}\left(\frac{c}{b} + \frac{ac^2}{b^3}\right) - \frac{a\alpha_2^2}{b}. \qquad (8)$$

Такъ какъ α_2 — *второго порядка* (т.-е. содержитъ множителемъ a^2), то $\alpha_2 a$ и $\frac{\alpha_2^2 a}{b}$ будутъ соотвѣтственно третьяго и пятаго порядка. Поэтому, если мы отбросимъ члены, содержащіе этихъ множителей, а также членъ $\frac{a^3c^4}{b^7}$, который, какъ членъ третьяго порядка, тоже нѣтъ основанія сохранять, то у насъ получится, какъ *третье приближеніе*,

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}; \qquad (9)$$

сдѣланная ошибка не болѣе, какъ третьяго порядка. Эти разсужденія мы можемъ продолжить какъ-угодно далеко.

§ 264. Замѣчаніе. — Формулы для *послѣдовательныхъ приближеній*:

$$x_1 = -\frac{c}{b}, \quad x_2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}, \quad x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}$$

удовлетворяютъ тѣмъ условіямъ, о соблюденіи которыхъ всегда надо заботиться въ системѣ послѣдовательныхъ приближеній:

1. Каждое приближеніе получается изъ предыдущаго посредствомъ прибавленія члена поправки.

2. Ошибка, появляющаяся послѣ прибавленія каждаго изъ членовъ поправки въ отдѣльности, всегда *очень мала* сравнительно съ прибавленнымъ членомъ.

Дѣйствительно, полагая $x = -\frac{c}{b}$, дѣлаемъ ошибку, содержащую множителемъ a, и слѣдовательно, очень малую сравнительно съ $-\frac{c}{b}$.

Полагая $x = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}$, дѣлаемъ ошибку, содержащую множителемъ a^2, и слѣдовательно, очень малую сравнительно съ $\frac{ac^2}{b^3}$, и т. д.

На основаніи этого замѣчанія, чтобы знать, будетъ ли полученное значеніе больше или меньше истиннаго, достаточно испытать знакъ непосредственно слѣдующаго члена поправки. Если этотъ членъ положителенъ, то, принимая во вниманіе, что онъ превосходитъ сумму всѣхъ слѣдующихъ за нимъ, заключаемъ, что ошибка положительна, а потому найденное значеніе меньше истиннаго. Наоборотъ, если слѣдующій членъ поправки отрицателенъ, то найденное значеніе больше истиннаго.

VI. Свойства трехчлена второй степени

§ 265. Опредѣленіе трехчлена второй степени.—Трехчленомъ второй степени называется многочленъ изъ трехъ членовъ слѣдующаго общаго вида:

$$ax^2 + bx + c,$$

гдѣ a, b, c — постоянныя числа, положительныя или отрицательныя, заданныя *à priori*, а x—перемѣнное число, которое можетъ принимать всевозможныя значенія. При измѣненіи значенія x измѣняется и значеніе трехчлена и проходитъ по величинѣ черезъ различныя свои состоянія, которыя полезно изучить.

Мы уже говорили, что (**§ 255**) корнями трехчлена называютъ обыкновенно корни уравненія, которое получаютъ, приравнивая трехчленъ нулю. Эти числа могутъ быть вещественными или мнимыми; если обозначить ихъ черезъ x' и x'', то, какъ извѣстно, трехчленъ можно представить въ видѣ произведенія $a(x-x')(x-x'')$.

§ 266. Теорема I.—*Если корни трехчлена, x' и x'', вещественные и неравные, то послѣ подстановки въ немъ вмѣсто x какого-нибудь числа, взятаго между этими корнями, получимъ значенiе для трехчлена со знакомъ, противоположнымъ знаку его перваго члена; а если вмѣсто x подставить число, не заключающееся между корнями, то получимъ значенiе для трехчлена съ такимъ же знакомъ, какъ у перваго его члена.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x' < x''$; тогда при всякомъ значенiи x, заключающемся между x' и x'', разность $(x - x')$ положительна, а $(x - x'')$ отрицательна; слѣдовательно, произведенiе $(x - x')(x - x'')$ отрицательно, а потому знакъ произведенiя $a(x - x')(x - x'')$ противоположенъ знаку a, или, что одно и то же, знаку ax^2. Если, напротивъ, значенiе, приписываемое x, меньше x' или больше x'', то множители $(x - x')$, $(x - x'')$ или оба отрицательны, или оба положительны; ихъ произведенiе положительно, и знакъ трехчлена $a(x - x')(x - x'')$ такой же, какъ у a.

§ 267. Теорема II.—*Если корни трехчлена—вещественные и равные, то знакъ его всегда такой же, какъ и у перваго его члена, каково бы ни было значенiе, приписываемое x, кромѣ только того, которое обращаетъ трехчленъ въ нуль.*

Дѣйствительно, намъ извѣстно (§ 247), что въ этомъ случаѣ трехчленъ можетъ быть представленъ въ слѣдующемъ видѣ:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Каково бы ни было значенiе x, второй множитель, какъ полный квадратъ, всегда положителенъ; слѣдовательно, знакъ трехчлена совпадаетъ со знакомъ a. Однако необходимо сдѣлать исключенiе для $x = -\frac{b}{2a}$, при которомъ трехчленъ обращается въ нуль.

§ 268. Теорема III.—*Если корни трехчлена—мнимые, то знакъ его такой же, какъ у перваго его члена, каково бы ни было x.*

Въ этомъ случаѣ, какъ мы видѣли (§ 248), трехчленъ равенъ произведенiю a на сумму квадратовъ двухъ вещественныхъ чиселъ, изъ которыхъ одно непремѣнно отлично отъ нуля. Сумма эта всегда положительна, а потому произведенiе того же знака, какъ и a.

§ 269. Замѣчаніе.—Три предыдущія теоремы можно соединить въ одну слѣдующую: *Трехчленъ* $ax^2 + bx + c$ *имѣетъ такой же знакъ, какъ и его первый членъ, при всѣхъ значеніяхъ* x *кромѣ тѣхъ, которыя лежатъ между корнями.*

При этомъ подразумѣвается, что въ случаѣ мнимыхъ корней x никогда между ними не заключается; слѣдовательно, трехчленъ имѣетъ знакъ своего перваго члена.

§ 270. Приложеніе къ неравенствамъ второй степени.—Неравенство, приводящееся къ одному изъ видовъ:

$$Ax^2 + Bx + C > 0\,,\quad Ax^2 + Bx + C < 0\,,$$

называется неравенствомъ второй степени; здѣсь A, B, C — данныя положительныя или отрицательныя числа, а x неизвѣстная, предѣлы для которой надо такъ опредѣлить, чтобы удовлетворялось то неравенство, куда она входитъ.

Этотъ важный вопросъ рѣшается при помощи предыдущихъ теоремъ.

1. Требуется рѣшить неравенство

$$3x^2 + 5x + \frac{4}{3} < 0.$$

Приравнявъ первую часть нулю, найдемъ корни $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{4}{3}$, вещественные и неравные; слѣдовательно, неравенство будетъ удовлетворено, т. е. знакъ первой части его будетъ противоположенъ знаку перваго ея члена, если x взято между $-\frac{1}{3}$ и $-\frac{4}{3}$, иначе говоря, если

$$-\frac{4}{3} < x < -\frac{1}{3}$$

2. Требуется рѣшить еще такое неравенство:

$$-9 + 6x - x^2 < 0\,.$$

Корни трехчлена въ этомъ случаѣ — вещественные и равные 3, а его первый членъ — x^2 отрицателенъ; слѣдовательно, неравенство справедливо для всякаго значенія x, кромѣ $x = 3$, превращающаго неравенство въ равенство.

3. Требуется рѣшить, наконецъ, слѣдующее неравенство:

$$x^2 - 3x + 7 > 0\,.$$

Корни тре́хчлена въ этомъ случаѣ — мнимые и первый его членъ положителенъ; слѣдовательно, неравенство удовлетворяется при всякомъ x.

§ 271. Замѣчаніе. — Впослѣдствіи мы увидимъ, что теоріей неравенствъ часто пользуются при изслѣдованіи задачъ для опредѣленія условій возможности.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Рѣшить уравненіе

$$(1+x+x^2)^{\frac{1}{2}}=a-(1-x+x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Отв. $x=\pm\frac{a}{2}\left(\frac{a^2-4}{a^2-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

II. Рѣшить уравненіе

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1.$$

Отв. $x=\pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a}{b}-1}$.

III. Рѣшить уравненіе

$$\sqrt{(1+x)^2-ax}+\sqrt{(1-x)^2+ax}=x.$$

Отв. $x=\pm 2\sqrt{(1-a)\left(1-\frac{a}{3}\right)}$ и $x=0$. Послѣднее значеніе удовлетворитъ только тогда, если будетъ измѣненъ знакъ при одномъ изъ радикаловъ.

IV. Рѣшить уравненіе

$$\frac{21x^3-16}{3x^2-4}-7x=5.$$

Отв. $x'=2,\ x''=-\frac{2}{15}$.

V. Рѣшить уравненіе

$$mqx^2-mnx+pqx-np=0.$$

Отв. $x'=\frac{n}{q},\ x''=-\frac{p}{m}$

VI. **Рѣшить уравненіе**

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a+2x}=0.$$

Отв. $x=\frac{a}{2}(-3\pm\sqrt{3})$.

VII. **Рѣшить уравненіе**

$$\frac{\sqrt{x^2+x+6}}{3}=\frac{20-\frac{4}{3}\sqrt{x^2+x+6}}{\sqrt{x^2+x+6}}.$$

Отв. Принимають $\sqrt{x^2+x+6}$ за вспомогательную неизвѣстную и находятъ:

$$x'=5,\ x''=-6,$$

кромѣ того,

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{377}}{2},$$

корни, удовлетворяющіе только при условіи, если взять радикалъ со знакомъ —.

VIII. **Рѣшить уравненіе**

$$2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30.$$

Отв. Принимають $2x^2+3x$ за вспомогательную неизвѣстную и находятъ:

$$x'=3,\ x''=-\frac{9}{2},\ x=\frac{-3\pm\sqrt{329}}{4};$$

два послѣднихъ корня удовлетворяютъ только при условіи, если взять радикалъ со знакомъ —.

IX. **Рѣшить уравненіе**

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{3}}{x^2}.$$

Отв. $x=\pm\frac{1}{2}$.

X. **Рѣшить уравненіе**

$$\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}.$$

Отв. Полагая $z=\sqrt[m]{\frac{1+x}{1-x}}$, находимъ $z=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{z^m-1}{z^m+1}$.

XI Рѣшить уравненie

$$\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 = 1 + \frac{cx}{ab}$$

Отв. $x = a\left(1 \pm 2\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$.

XII Рѣшить уравненie

$$\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}+\sqrt{c+x} = 0.$$

Отв. $x = \frac{-(a+b+c) \pm 2\sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}}{3}$.

XIII. Составить сумму квадратовъ, сумму кубовъ, сумму четвертыхъ степеней и сумму величинъ, обратныхъ четвертымъ степенямъ корней уравненія $ax^2+bx+c=0$.

Отв. $x'^2+x''^2 = \frac{b^2-2ac}{a^2}$, $x'^3+x''^3 = \frac{3abc-b^3}{a^3}$, $x'^4+x''^4 = \frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$,

$\frac{1}{x'^4}+\frac{1}{x''^4} = \frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{c^4}$.

XIV. Найти необходимыя условія, чтобы дробь

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{A'x^2+B'x+C'}$$

не зависѣла отъ x.

Отв. $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$.

XV. Доказать, что уравненіе

$$(b^2-4ac)x^2+2(2ac+2a'c'-bb')x+(b'^2-4a'c')=0$$

всегда имѣетъ вещественные корни, если только (b^2-4ac) отрицательно.

Отв. Можно доказать, если $(b'^2-4a'c')$ также отрицательно. Тогда полагаютъ $b^2-4ac=-\alpha^2$, $b'^2-4a'c'=-\alpha'^2$ и доказываютъ, что количество, стоящее въ значеніяхъ x подъ радикаломъ, есть произведеніе двухъ множителей, изъ которыхъ каждый есть сумма двухъ квадратовъ.

ГЛАВА ВТОРАЯ

Уравненія съ одною неизвѣстною, приводящіяся къ уравненіямъ второй степени

I. Биквадратныя уравненія

§ 272. Рѣшеніе биквадратнаго уравненія. — Уравненіе съ одною неизвѣстною называется *биквадратнымъ*, если содержитъ только 2-ую и 4-ую степени неизвѣстной. Оно можетъ быть всегда приведено къ виду:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0. \tag{1}$$

Если x^2 принять за неизвѣстную, то у насъ получится уравненіе 2-ой степени. Дѣйствительно, полагая $x^2 = z$, будемъ имѣть $x^4 = z^2$, и уравненіе приметъ видъ:

$$az^2 + bz + c = 0,$$

откуда

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Извлекая изъ этого выраженія квадратный корень, получимъ x:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{2}$$

Такимъ образомъ x, вообще, имѣетъ четыре значенія, равныхъ по абсолютной величинѣ между собою попарно, но противоположныхъ по знаку.

§ 273. Изслѣдованіе формулъ.—1) Если $b^2 - 4ac > 0$, то оба значенія z вещественныя; притомъ они могутъ быть или оба положительными, или оба отрицательными, или одно—положительнымъ, а другое—отрицательнымъ (**§ 246**). *Въ первомъ случаѣ всѣ четыре значенія x—вещественныя; во второмъ—всѣ четыре мнимыя; въ третьемъ—два изъ нихъ вещественныя, а два мнимыя.*

2) Если $b^2 - 4ac = 0$, то значенія z — вещественныя и равныя, а потому *значенія x равны между собою по абсолютной величинѣ; притомъ они будутъ вещественными, если b и a противоположны по знаку, и мнимыми, если b и a—одного знака.*

3) Если $b^2 - 4ac < 0$, то значенія z — мнимыя; слѣдовательно, *всѣ четыре значенія x также мнимыя.*

§ 274. Преобразованіе выраженій вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.—Формула (2), служащая рѣшеніемъ биквадратнаго уравненія, содержитъ два радикала—одинъ надъ другимъ; этотъ видъ, вообще говоря, неудобенъ для вычисленія корней: поэтому, не безполезно постараться разыскать тѣ условія, при которыхъ возможно преобразовать выраженіе вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ въ сумму двухъ простыхъ радикаловъ.

Полагаемъ

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \qquad (1)$$

и постараемся рѣшить это уравненіе относительно x и y въ *раціональныхъ* значеніяхъ; такое рѣшеніе есть единственный случай, когда наше преобразованіе является выгоднымъ. Для удобства предположимъ, что всѣ четыре радикала имѣютъ знакъ $+$; тогда, возвышая въ квадратъ обѣ части уравненія (1), мы получимъ равносильное уравненіе (§ 126):

$$a + \sqrt{b} = x + y + 2\sqrt{xy},$$

или

$$(a - x - y) + \sqrt{b} = 2\sqrt{xy}. \qquad (2)$$

Возвысивъ еще разъ въ квадратъ, будемъ имѣть:

$$(a - x - y)^2 + 2(a - x - y)\sqrt{b} + b = 4xy.$$

Вторая часть, по предположенію, соизмѣрима (раціональна); то же можно сказать и про члены $(a - x - y)^2$ и b. Слѣдовательно, необходимо, чтобы $2(a - x - y)\sqrt{b}$ было также соизмѣримымъ; а такъ какъ $\sqrt{b}$ несоизмѣримо, то $a - x - y$ должно равняться нулю, т.-е

$$x + y = a,$$

и, слѣдовательно,

$$4xy = b. \qquad (3)$$

Отсюда заключаемъ, что x и y будутъ непремѣнно корнями уравненія (§ 256):

$$z^2 - az + \frac{b}{4} = 0, \qquad (4)$$

напр.,

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2},\quad y=\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}. \qquad (5)$$

Эти значенія x и y соизмѣримы только тогда, когда (a^2-b) полный квадратъ; слѣдовательно, если это условіе не выполнено, преобразованіе невозможно. Если же, напротивъ, (a^2-b) есть нѣкоторый квадратъ c^2, то x и y имѣютъ соизмѣримыя значенія:

$$x=\frac{a+c}{2},\quad y=\frac{a-c}{2},$$

удовлетворяющія уравненію (2), и формула преобразованія будетъ:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}. \qquad (6)$$

Замѣтимъ, между прочимъ, что формула

$$\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

остается справедливой, каково бы ни было (a^2-b), такъ какъ, возвышая ее въ квадратъ, мы получимъ тождество; но если (a^2-b) не есть полный квадратъ, то она не представляетъ никакой выгоды: вмѣсто одного сложнаго радикала появляется сумма двухъ радикаловъ *того же вида*.

§ 275. Замѣчаніе. — Для преобразованія $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ полагаемъ

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y},$$

гдѣ x больше y. При помощи тѣхъ же разсужденій, для опредѣленія x и y, приходимъ къ тому же уравненію (4). Слѣдовательно, преобразованіе удастся только тогда, когда (a^2-b) представитъ полный квадратъ c^2. Въ этомъ случаѣ

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}-\sqrt{\frac{a-c}{2}}. \qquad (7)$$

Если теперь первая часть будетъ со знакомъ—, то не трудно замѣтить, какой видъ должны принять формулы (6) и (7) для согласованія знаковъ обѣихъ частей; онѣ будутъ:

$$\left.\begin{aligned} -\sqrt{a+\sqrt{b}} &= -\sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}}, \\ -\sqrt{a-\sqrt{b}} &= -\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{\frac{a-c}{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Дѣйствительно, для полученія этихъ новыхъ формулъ достаточно измѣнить знаки обѣихъ частей формулъ (6) и (7).

Соединяя въ одинъ всѣ найденные результаты, пишемъ:

$$\pm\sqrt{a\pm\sqrt{b}} = \pm\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right).$$

Въ этой формулѣ внѣшніе знаки берутся или заразъ верхніе, или заразъ нижніе; также берутся и внутренніе. Иначе говоря, согласованы между собою отдѣльно внѣшніе и отдѣльно внутренніе знаки.

§ 276. Приложенія.

1. $\sqrt{7-\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{7+\sqrt{49-24}}{2}} - \sqrt{\frac{7-\sqrt{49-24}}{2}} = \sqrt{6}-1.$

2. $\sqrt{94+6\sqrt{245}} = \sqrt{94+\sqrt{8820}} = \sqrt{\frac{94+4}{2}} + \sqrt{\frac{94-4}{2}} = 7+3\sqrt{5}.$

3. Въ геометріи доказывается, что если C будетъ обозначать сторону правильнаго вписаннаго въ кругъ радіуса R многоугольника, то сторона x правильнаго вписаннаго въ тотъ же кругъ многоугольника съ удвоеннымъ числомъ сторонъ выразится формулою: $x = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2-C^2}}$. Здѣсь $a = 2R^2$, $b = 4R^4 - C^2R^2$ и, значитъ, $a^2 - b = C^2R^2$. Слѣдовательно,

$$x = \sqrt{R\left(R+\frac{C}{2}\right)} - \sqrt{R\left(R-\frac{C}{2}\right)}.$$

4. Найти необходимое и достаточное условіе, чтобы корни биквадратнаго уравненія $x^4+px^2+q=0$ выражались суммою двухъ простыхъ радикаловъ. Имѣемъ:

$$x = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}}.$$

Въ этомъ случаѣ $a = -\frac{p}{2}$, $b = \frac{p^2}{4} - q$, откуда $a^2 - b = q$, а потому необходимо и достаточно, чтобы q представляло полный квадратъ.

II. Нѣкоторыя двучленныя уравненія

§ 277. Видъ двучленнаго уравненія. — Двучленное уравненіе содержитъ всего два члена и имѣетъ видъ:

$$x^m + A = 0. \tag{1}$$

Если A положительно, то, обозначая корень m-ой степени изъ A черезъ a, будемъ имѣть: $A = a^m$. Если же A отрицательно, то, обозначая черезъ a корень m-ой степени изъ $-A$, будемъ имѣть: $A = -a^m$. Уравненіе (1) приметъ тогда видъ:

$$x^m \pm a^m = 0. \tag{2}$$

Далѣе, полагая $x = ay$, можемъ замѣнить уравненіе (2) слѣдующимъ:

$$a^m y^m \pm a^m = 0,$$

или

$$y^m \pm 1 = 0. \tag{3}$$

Къ такому виду можетъ быть приведено всякое двучленное уравненіе. Найдя значенія y, умножаемъ ихъ на a и получаемъ значенія x.

§ 278. Рѣшеніе нѣкоторыхъ двучленныхъ уравненій.—1. Уравненіе

$$x^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

имѣетъ корни:

$$x = \pm 1.$$

Уравненіе

$$x^2 + 1 = 0 \tag{2}$$

имѣетъ корни:

$$x = \pm \sqrt{-1}.$$

2. Уравненіе

$$x^3 - 1 = 0 \tag{3}$$

можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$$

и, слѣдовательно, разбивается на два уравненія:

$$x - 1 = 0 \text{ и } x^2 + x + 1 = 0.$$

корни которыхъ будутъ:

$$x = 1 \quad \text{и} \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Уравненіе

$$x^3 + 1 = 0 \tag{4}$$

послѣ замѣны x на $-x$ обращается въ предыдущее; слѣдовательно, его корни будутъ такіе же, какъ и уравненія (3), но только съ обратными знаками, т.-е.

$$x = -1 \quad \text{и} \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

3. Уравненіе

$$x^4 - 1 = 0, \tag{5}$$

можно представить въ видѣ:

$$(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0,$$

откуда видно, что оно равносильно двумъ уравненіямъ (1) и (2); слѣдовательно, его корнями будутъ корни этихъ двухъ уравненій, т.-е

$$x = \pm 1, \quad x = \pm \sqrt{-1}.$$

Уравненіе

$$x^4 + 1 = 0 \tag{6}$$

равносильно

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2,$$

или, что одно и то же,

$$(x^2 + 1)^2 - 2x^2 = 0,$$

а это, въ свою очередь, можно написать такъ.

$$(x^2 + 1 + x\sqrt{2})(x^2 + 1 - x\sqrt{2}) = 0;$$

слѣдовательно, оно разлагается на два квадратныхъ уравненія:

$$x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0.$$

Они различаются только знакомъ при x и имѣютъ корни:

$$x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}, \quad x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}.$$

Это и будутъ четыре корня уравненія (6).

4. Уравненіе

$$x^6 - 1 = 0 \qquad (7)$$

разлагается на два:

$$x^3 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^3 + 1 = 0,$$

а потому рѣшенія его не что иное, какъ шесть корней уравненій (3) и (4), т.-е.

$$x = \pm 1 \text{ и } x = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Уравненіе

$$x^6 + 1 = 0 \qquad (8)$$

при замѣнѣ x на $x\sqrt{-1}$ обращается въ предыдущее, такъ какъ

$$(x\sqrt{-1})^6 = x^6(\sqrt{-1})^6 = -x^6;$$

поэтому его корни получимъ изъ уравненій:

$$x\sqrt{-1} = \pm 1, \quad x\sqrt{-1} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Для этого достаточно умножить обѣ части каждаго изъ нихъ на $\sqrt{-1}$; тогда первыя части обратятся въ $x \times (-1)$ или, что одно и то же, въ $-x$. Слѣдовательно,

$$x = \mp \sqrt{-1} \quad \text{и} \quad x = \frac{\pm \sqrt{3} \pm \sqrt{-1}}{2}.$$

5. Уравненіе

$$x^8 - 1 = 0 \qquad (9)$$

разлагается на два:

$$x^4 - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^4 + 1 = 0;$$

слѣдовательно, корнями его будутъ восемь корней уравненій (5) и (6), т.-е.

$$x = \pm 1, \quad x = \pm \sqrt{-1}, \quad x = \frac{\pm \sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}.$$

Уравненіе

$$x^8 + 1 = 0 \qquad (10)$$

можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$x^8 + 2x^4 + 1 = 2x^4,$$

или, что то же самое,

$$(x^4+1)^2-2x^4=0;$$

слѣдовательно, оно разлагается на два биквадратныхъ уравненія:

$$x^4+1+x^2\sqrt{2}=0 \quad \text{и} \quad x^4+1-x^2\sqrt{2}=0,$$

рѣшая которыя по извѣстнымъ правиламъ, находимъ:

$$x=\pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}} \quad \text{и} \quad x=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}}$$

6. Наконецъ, корни уравненія

$$x^{16}-1=0 \tag{11}$$

суть корни уравненій (7) и (8).

Мы не станемъ продолжать изученія подобныхъ преобразованій, такъ какъ наша цѣль заключалась только въ томъ, чтобы на нѣсколькихъ примѣрахъ показать, какъ нѣкоторыя изъ уравненій выше второй степени могутъ быть приведены къ уравненіямъ 2-ой степени. Общій же методъ рѣшенія двучленныхъ уравненій принадлежитъ второй части алгебры.

III. Трехчленныя уравненія

§ 279. Рѣшеніе трехчленнаго уравненія. — Трехчленнымъ уравненіемъ называется уравненіе, состоящее всего изъ трехъ членовъ и имѣющее видъ:

$$ax^{2n}+bx^n+c=0. \tag{1}$$

Принимая за неизвѣстную x^n, т.-е. полагая

$$x^n=z, \text{ откуда } x^{2n}=z^2, \tag{2}$$

можемъ свести данное уравненіе на квадратное:

$$az^2+bz+c=0. \tag{3}$$

Слѣдовательно, мы можемъ найти два значенія для z и подставляя ихъ послѣдовательно въ уравненіе (2), мы получимъ два двучленныхъ уравненія степени n, корни которыхъ и будутъ корнями уравненія (1).

УПРАЖНЕНІЯ

I. Рѣшить уравненіе

$$\frac{1}{x - \sqrt{2 - x^2}} - \frac{1}{x + \sqrt{2 - x^2}} = 1$$

Отв. $x = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$.

II. Рѣшить уравненіе

$$2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 20$$

Отв. Полагая $\sqrt[3]{x} = z$, находимъ:

$$x = \pm 8, \quad x = \pm\frac{5}{2}\sqrt{-\frac{5}{2}}.$$

III. Рѣшить уравненіе

$$\frac{x}{a + x} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a + x}} = \frac{b}{a}$$

Отв. Полагая $\frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a}} = z$, находимъ.

$$z = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2 - 4ab}}{2(a - b)}, \quad x = \frac{a(a^2 + 2ab - 2b^2 \mp a\sqrt{5a^2 - 4ab})}{2(a - b)^2}$$

IV. Рѣшить уравненіе

$$cx = (\sqrt{1 + x} - 1)(\sqrt{1 - x} + 1)$$

Отв. Полагая $\sqrt{1 + x} = z$, находимъ

$$x = 0, \quad x = \frac{4c(1 - c^2)}{(1 + c^2)^2}$$

V. Рѣшить уравненіе

$$(x + 2)^2 + 2(x + 2)\sqrt{x} - 3\sqrt{x} = 46 + 2x.$$

Отв. Полагая $x + \sqrt{x} + 2 = z$, находимъ:

$$x = 4, \quad x = 9, \quad x = \frac{-13 \pm 3\sqrt{-3}}{2}$$

VI. Рѣшить уравненіе

$$(a+x)^{\frac{2}{3}} + 4(a-x)^{\frac{2}{3}} - 5(a^2-x^2)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

Отв. $x = 0$, $x = \frac{63a}{65}$.

VII. Рѣшить уравненіе

$$(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1-x)^{\frac{2}{3}} = (1-x^2)^{\frac{1}{3}}.$$

Отв. $x = \pm\frac{\sqrt{-3}}{3}$.

VIII. Рѣшить уравненіе

$$\frac{(1+x)^2}{1+x^3} + \frac{(1-x)^2}{1-x^3} = a$$

Отв. $x = \pm\sqrt{\frac{2}{a} - \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{4}{a^2} - \frac{3}{4}}}$.

IX. Рѣшить уравненіе

$$(a+x)^{\frac{1}{4}} + (a-x)^{\frac{1}{4}} = h.$$

Отв. $x = \pm\sqrt{a^2 - \left\{h^2 \pm \sqrt{a + \frac{h^4}{2}}\right\}^4}$.

X. Рѣшить уравненіе

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{x}{a}.$$

Отв. $x = a$, $x = a\frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{8}$.

Иногда при одномъ взглядѣ на уравненіе видно, что оно допускаетъ корень a. Тогда его первая часть дѣлится на $(x - a)$ (§ 77) и разлагается, поэтому, на множителей, что облегчаетъ рѣшеніе уравненія, понижая его степень.

Вотъ нѣсколько примѣровъ.

XI. Рѣшить уравненіе

$$x^3 - 3x = 2.$$

Отв. Оно допускаетъ корень $x = 2$.

XII. Рѣшить уравненіе

$$2x^3 - x^2 = 1.$$

Отв. Оно допускаетъ корень $x = 1$

XIII. Рѣшить уравненіе

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 8 = 0$$

Отв. Оно допускаетъ корень $x = 4$.

XIV. Рѣшить уравненіе

$$x^4 - 2x^3 + x - 132 = 0.$$

Отв. Его пишутъ подъ видомъ.

$$x^2(x-1)^2 - x(x-1) - 132 = 0$$

и полагаютъ

$$x(x-1) = z;$$

находятъ:

$$x = 4, \quad x = -3, \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{-43}}{2}.$$

XV. Рѣшить уравненіе

$$x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0.$$

Отв. Оно допускаетъ двукратный корень $x = 1$ и такимъ образомъ приводится къ квадратному уравненію.

XVI. Рѣшить уравненіе

$$x^4 + \frac{13}{3}x^3 - 39x - 81 = 0$$

Отв. Его пишутъ подъ видомъ:

$$x^4 - 81 + \frac{13}{3}x(x^2 - 9) = 0$$

и находятъ:

$$x = \pm 3, \quad x = \frac{-13 \pm \sqrt{-155}}{6}.$$

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Уравненія со многими неизвѣстными

I. Уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными

§ 280. Общій видъ уравненія второй степени съ двумя неизвѣстными. — Уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными x и y, приведенное къ цѣлому виду, можетъ содержать члены только шести родовъ, а именно, члены съ x^2, члены съ xy, члены съ y^2, затѣмъ члены съ y, члены съ x и независимые члены. Итакъ, уравненіе второй степени можетъ быть приведено къ виду:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

§ 281. Рѣшеніе двухъ уравненій, изъ которыхъ одно — первой степени. — Рѣшеніе совмѣстныхъ уравненій представляетъ одинъ изъ наиболѣе сложныхъ вопросовъ алгебры. Не касаясь здѣсь общей теоріи, мы ограничимся разсмотрѣніемъ нѣкоторыхъ наиболѣе простыхъ случаевъ.

Можно всегда рѣшить систему двухъ уравненій съ двумя неизвѣстными, изъ которыхъ одно—первой, а другое—второй степени. Въ самомъ дѣлѣ, пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (1)\\ ax + by = c. \quad (2)\end{aligned}\right\}$$

Изъ уравненія (2) находимъ:

$$y = \frac{c - ax}{b};$$

послѣ подстановки этого значенія въ уравненіе (1), послѣднее станетъ квадратнымъ относительно x:

$$\left.\begin{aligned}(Ab^2 - Bab + Ca^2)x^2 + (Bbc - 2Cac + Db^2 - Eab)x + \\ + Cc^2 + Ebc + Fb^2 = 0;\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

отсюда получаемъ два значенія для этой неизвѣстной. Замѣняя ими x къ уравненіи (2), находимъ два соотвѣтственныхъ значенія для y.

Слѣдовательно, предложенная система имѣетъ двѣ системы рѣшеній. Обѣ онѣ—вещественныя, когда оба значенія x—вещественныя, и обѣ—мнимыя, когда значенія x—мнимыя.

§ 282. Случай двухъ уравненій второй степени. — *Если оба уравненія съ двумя неизвѣстными - второй степени, то исключеніе одной изъ нихъ приводитъ, вообще, къ полному уравненію четвертой степени.*

Дѣйствительно, пусть дана система

$$\left.\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \\ A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

Для исключенія y можно было бы найти его значеніе изъ какого-нибудь одного уравненія и подставить въ другое; но тогда новое уравненіе будетъ содержать радикалы, отъ которыхъ пришлось бы еще освобождаться. Проще, сначала исключить y^2, умноживъ уравненіе (1) на C', а (2) на C и вычтя полученные результаты одинъ изъ другого; такимъ образомъ получимъ:

$$(AC' - CA')x^2 + (BC' - CB')xy + (DC' - CD')x + \\ + (EC' - CE')y + (FC' - CF') = 0,$$

или, обозначая каждый изъ коэффиціентовъ одною буквой, напишемъ:

$$ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0. \qquad (3)$$

Этимъ уравненіемъ можно замѣнить (§ 139) одно изъ данныхъ.

Изъ него находимъ значеніе для y:

$$y = -\frac{ax^2 + cx + e}{bx + d};$$

подставляя его въ уравненіе (1), находимъ:

$$Ax^2 - \frac{Bx(ax^2 + cx + e)}{bx + d} + \frac{C(ax^2 + cx + e)^2}{(bx + d)^2} + \\ + Dx - \frac{E(ax^2 + cx + e)}{bx + d} + F = 0. \qquad (4)$$

Легко замѣтить, что, умножая обѣ части на $(bx + d)^2$ и освобождаясь такимъ образомъ отъ знаменателей, придемъ къ уравненію четвертой степени. Это уравненіе, вообще, содержитъ члены третьей и первой степени, и потому не можетъ быть рѣшено съ помощью обычныхъ пріемовъ Элементарной Алгебры.

Такимъ образомъ система двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными, вообще говоря, не можетъ быть рѣшена при помощи уже извѣстныхъ намъ методовъ; но иногда встрѣчаются

простыя системы, рѣшеніе которыхъ можетъ быть найдено при помощи нѣкоторыхъ искуственныхъ частныхъ пріемовъ. Приведемъ нѣсколько примѣровъ.

§ 283. Рѣшеніе нѣкоторыхъ простыхъ системъ:

1. Дана система

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a, \\ xy &= b^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Непосредственно видно, что x и y — корни уравненія (§ 256)

$$z^2 - az + b^2 = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}. \tag{2}$$

Необходимымъ условіемъ вещественности корней будетъ:

$$a^2 \geqq 4b^2.$$

2. Дана система

$$\left.\begin{aligned} x - y &= a \\ xy &= b^2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Эту систему можно свести на предыдущую, полагая $y = -v$; тогда

$$x + v = a, \ xv = -b^2,$$

откуда

$$\left.\begin{matrix} x \\ v \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}.$$

Такимъ образомъ

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}, \\ y &= \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2} \end{aligned}\right\} (2), \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} x &= \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}, \\ y &= -\frac{a + \sqrt{a^2 + 4b^2}}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

т.-е. двѣ системы всегда вещественныхъ рѣшеній.

3. Дана система

$$\left.\begin{aligned} x + y &= a, \\ x^2 + y^2 &= b^2. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Возвысивъ въ квадратъ обѣ части перваго уравненія и вычтя затѣмъ по-членно изъ полученнаго результата второе, находимъ.

$$2xy = a^2 - b^2.$$

Зная же сумму и произведеніе неизвѣстныхъ, мы можемъ считать ихъ корнями уравненія

$$z^2 - az + \frac{a^2 - b^2}{2} = 0,$$

откуда

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}. \quad (2)$$

Значенія x и y будутъ вещественными, если $2b^2 - a^2 > 0$, и мнимыми, если $2b^2 - a^2 < 0$.

4. Дана система

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a^2, \\ xy &= b^2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Удвоивъ обѣ части второго уравненія, сложимъ его съ первымъ уравненіемъ по-членно и такъ же по-членно вычтемъ его изъ перваго уравненія; новая система

$$\left.\begin{aligned} (x + y)^2 &= a^2 + 2b^2, \\ (x - y)^2 &= a^2 - 2b^2 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

равносильна заданной (§ 139). Отсюда выводимъ

$$\left.\begin{aligned} x + y &= \pm\sqrt{a^2 + 2b^2}, \\ x - y &= \pm\sqrt{a^2 - 2b^2}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Сложивъ же и вычтя послѣднія уравненія по-членно и результаты раздѣливъ на 2, найдемъ:

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2b^2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2b^2}, \\ y &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 2b^2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2b^2}. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Замѣчаніе. — Можетъ показаться, что, беря знаки при радикалахъ всевозможными способами, мы здѣсь будемъ имѣть восемь системъ рѣшеній; но не надо упускать изъ виду, что, во-первыхъ, уравненія (3) образуютъ только четыре системы, именно.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= R, \\ x - y &= R', \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= -R, \\ x - y &= R', \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= R, \\ x - y &= -R', \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + y &= -R, \\ x - y &= -R', \end{aligned}\right\}$$

гдѣ $R=\sqrt{a^2+2b^2}$, $R'=\sqrt{a^2-2b^2}$. Во-вторыхъ, уравненія (1) не измѣняются отъ перестановки x и y; слѣдовательно, первая изъ только-что выписанныхъ системъ равносильна третьей, а вторая — четвертой. Поэтому, въ дѣйствительности, мы имѣемъ только двѣ системы рѣшеній.

Замѣчаемъ еще, что рѣшенія будутъ вещественными, если $a^2>2b^2$, и мнимыми, если $a^2<2b^2$.

5. Дана система

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=a^2,\\ xy&=b^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Эту систему легко свести на систему 2-го случая, написавъ ее слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2&=a^2,\\ x^2y^2&=b^4. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Изъ послѣдней системы находимъ сначала значенія x^2 и y^2, а затѣмъ x и y:

$$\text{или}\quad \left.\begin{aligned} x&=\pm\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4+4b^4}}{2}},\\ y&=\pm\sqrt{\frac{-a^2+\sqrt{a^4+4b^4}}{2}}, \end{aligned}\right\}(3),\quad \text{или}\quad \left.\begin{aligned} x&=\pm\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{a^4+4b^4}}{2}},\\ y&=\pm\sqrt{\frac{-a^2-\sqrt{a^4+4b^4}}{2}}. \end{aligned}\right\}(4)$$

Но система (2) — болѣе общая, чѣмъ система (1), такъ какъ мы возвысили въ квадратъ обѣ части второго уравненія системы (1). Поэтому, значенія x и y должны быть выбраны такъ, чтобы ихъ произведеніе равнялось b^2, т.-е. должны быть выбраны съ одинаковыми знаками.

Итакъ, у насъ будутъ четыре системы рѣшеній: двѣ первыя — вещественныя, а двѣ послѣднія — мнимыя.

II. Уравненія второй степени болѣе, чѣмъ съ двумя неизвѣстными

§ 284. Примѣры. — 1. Дана система

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=a,\\ x^2+y^2+z^2&=b^2,\\ xy&=cz. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Перенеся въ первомъ уравненіи z во вторую часть и возвысивъ затѣмъ обѣ части въ квадратъ, найдемъ:

$$x^2+2xy+y^2=a^2-2az+z^2.$$

Замѣнивъ затѣмъ x^2+y^2 и xy ихъ значеніями изъ двухъ другихъ уравненій, получимъ квадратное уравненіе относительно z:

$$2z^2-2(a+c)z+a^2-b^2=0,$$

откуда

$$z=\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-(2a^2-b^2)}}{2}. \qquad (2)$$

Зная z, найдемъ изъ перваго уравненія сумму $x+y$ и изъ послѣдняго произведеніе xy; послѣ этого вычисленія докончимъ такъ же, какъ въ пунктѣ 1-омъ § 263-го.

2. Дана еще система

$$\left.\begin{aligned} x^2+xy+y^2&=37,\\ x^2+xz+z^2&=28,\\ y^2+yz+z^2&=19.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Вычитая второе уравненіе изъ перваго, а третье изъ второго, находимъ.

$$\left.\begin{aligned}(y-z)(x+y+z)&=9,\\ (x-y)(x+y+z)&=9.\end{aligned}\right\}$$

откуда заключаемъ, что

$$y-z=x-y, \text{ или, что одно и то же, } x+z=2y. \qquad (2)$$

а потому

$$(x-y)y=3 \qquad (3)$$

Отсюда выводимъ, что

$$x=\frac{3}{y}+y;$$

подставивъ же это значеніе въ первое изъ данныхъ уравненій, получимъ:

$$\left(\frac{3}{y}+y\right)^2+3+y^2+y^2=37,$$

или

$$3y^4-28y^2+9=0,$$

т. е. биквадратное уравненіе относительно y; изъ него и опредѣляемъ эту неизвѣстную.

$$y=\pm 3,\quad y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Слѣдовательно,

$$x=\pm 4,\quad x=\pm\frac{10}{3}\sqrt{3},$$

$$z=\pm 2,\quad z=\mp\frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

III. Уравненія степени выше второй

§ 285. Примѣры.—1. Дана система

$$\left.\begin{aligned} x^2y + xy^2 &= 30, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{5}{6}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Освободившись отъ знаменателей во второмъ уравненіи, мы можемъ нашу систему переписать слѣдующимъ образомъ:

$$\left.\begin{aligned} xy(x+y) &= 30, \\ 6(x+y) &= 5xy. \end{aligned}\right\}$$

Принимая xy и $x+y$ за вспомогательныя неизвѣстныя u и v, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} uv &= 30, \\ 6v &= 5u. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Второе уравненіе даетъ $v = \frac{5}{6}u$, подставляя это значеніе v въ первое уравненіе, получаемъ:

$$\frac{5}{6}u^2 = 30, \quad \text{или} \quad u^2 = 36,$$

откуда

$$u = \pm 6, \quad \text{и} \quad v = \pm 5.$$

Значенія u и v надо взять съ одинаковыми знаками, такъ какъ $v = \frac{5}{6}u$.

Принявъ $u = 6$, $v = 5$, т.-е.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 5, \\ xy &= 6, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

найдемъ для x и y значенія 2 и 3.

Принявъ же $u = -6$, $v = -5$, т.-е.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= -5, \\ xy &= -6, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

найдемъ для x и y значенія -6 и 1.

2. Пусть дана еще система

$$\left.\begin{aligned} \frac{4}{y^2} + \frac{4+y}{y} &= \frac{8+4y}{x} + \frac{12y^2}{x^2}, \\ 4y^2 - xy - x. & \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Первое уравненіе по освобожденіи отъ знаменателей приметъ видъ:

$$4x^2 + (4 + y)yx^2 = (8 + 4y)xy^2 + 12y^4;$$

прибавляя къ обѣимъ частямъ по $4y^4$, получаемъ:

$$x^2(2 + y)^2 - 4xy^2(2 + y) + 4y^4 = 16y^4.$$

А такъ какъ теперь первая часть представляетъ квадратъ выраженія $x(2 + y) - 2y^2$, то уравненіе можетъ быть переписано такимъ образомъ:

$$[x(2 + y) - 2y^2]^2 = (4y^2)^2,$$

что равносильно

$$x(2 + y) - 2y^2 = \pm 4y^2. \qquad (2)$$

Слѣдовательно, данная система можетъ быть замѣнена двумя слѣдующими системами:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(2 + y) - 2y^2 = 4y^2, \\ 4y^2 - xy = x, \end{array} \right. \qquad \left. \begin{array}{l} x(2 + y) - 2y^2 = -4y^2, \\ 4y^2 - xy = x, \end{array} \right\} \quad (4)$$

которыя уже не трудно рѣшить. Дѣйствительно, подставляя въ первое уравненіе системы (3) вмѣсто x его значеніе,

$$x = \frac{4y^2}{y + 1},$$

выводимое изъ второго уравненія той же системы, получаемъ:

$$4y^2\left(\frac{2 + y}{y + 1}\right) - 6y^2 = 0, \quad \text{или} \quad 2y^2(1 - y) = 0,$$

откуда

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = 1,$$

и, слѣдовательно,

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = 2.$$

Точно такъ же найдемъ рѣшенія системы (4):

$$\left. \begin{array}{l} y = 0, \\ x = 0 \end{array} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{array}{l} y = -\dfrac{5}{3}, \\ x = -\dfrac{50}{3}. \end{array} \right\}$$

Такимъ образомъ предложенная система имѣетъ рѣшенія:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = 0, \end{array} \right. \qquad (2) \left\{ \begin{array}{l} x = 2, \\ y = 1, \end{array} \right. \qquad (3) \left\{ \begin{array}{l} x = -\dfrac{50}{3}, \\ y = -\dfrac{5}{3}. \end{array} \right.$$

3. Дана, наконецъ, еще система

$$\left.\begin{aligned} x^3+y^3+x^2y+y^2x&=13, \\ x^4y^2+x^2y^4&=468. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Группируя члены, можемъ переписать эти уравненія въ слѣдующемъ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x^2+y^2)&=13, \\ x^2y^2(x^2+y^2)&=468 \end{aligned}\right\}$$

Раздѣливъ второе изъ нихъ на первое, будемъ имѣть уравненіе

$$x^2y^2=36(x+y),$$

которымъ можно замѣнить одно изъ данныхъ. Обозначая произведеніе xy черезъ u, а сумму $x+y$ черезъ v, получимъ систему

$$\left.\begin{aligned} v(v^2-2u)&=13, \\ u^2&=36v. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Исключеніе v изъ этихъ уравненій приводитъ къ трехчленному уравненію

$$\frac{u^6}{36^3}-\frac{2u^3}{36}-13=0,$$

откуда выводимъ:

$$\frac{u^3}{36}=36\pm\sqrt{36^2+13.36},$$

и, слѣдовательно,

$$u=-6 \text{ и } u=6\sqrt[3]{13},$$

соотвѣтствующія же значенія v будутъ:

$$v=1 \text{ и } v=\sqrt[3]{13^2}$$

Итакъ, первая система рѣшеній получится изъ уравненія

$$z^2-z-6=0,$$

откуда

$$x=3,\ y=-2;$$

а вторая—изъ уравненія

$$z^2-\sqrt[3]{13^2}\,z+6\sqrt[3]{13}=0,$$

откуда

$$x=\frac{\sqrt[3]{13^2}+\sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2},\ y=\frac{\sqrt[3]{13^2}-\sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2}$$

УПРАЖНЕНІЯ

I. Рѣшить систему

$$\begin{cases} ab - \frac{1}{2}(a+b)(x+y)+xy=0, \\ cd - \frac{1}{2}(c+d)(x+y)+xy=0 \end{cases}$$

и показать, что

$$\frac{(x-y)^2}{4} = \frac{(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)}{(a+b-c-d)^2}.$$

Отв. Опредѣляютъ изъ данныхъ уравненій $x+y$ и xy и составляютъ выраженіе $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy$, равное $\frac{(x-y)^2}{4}$.

II. Рѣшить систему

$$a^n x^m + b^m y^n = 2\sqrt{a^m b^n x^m y^n}, \quad xy = ab.$$

Отв. Исключаютъ y и, полагая $\sqrt{x^{m+n}} = z$, получаютъ квадратное уравненіе

$$z^2 - 2b^n\sqrt{a^{m+n}}\,z + b^{m+n} = 0,$$

откуда и опредѣляютъ z, послѣ чего уже не трудно найти x и y.

III. Рѣшить систему

$$x+y=a, \quad x^3+y^3=d^3.$$

Отв. Вычисляютъ произведеніе xy; зная же сумму $x+y$ и произведеніе xy, находятъ:

$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4d^3}{3a} - \frac{a^2}{3}}.$$

IV. Рѣшить систему

$$x+y=a, \quad x^4+y^4=d^4.$$

Отв. Вычисляютъ произведенie xy, возвышая первое уравненie въ четвертую степень; находять:

$$xy = a^2 \pm \sqrt{\frac{a^4 + d^4}{2}}.$$

Послѣ этого не трудно опредѣлить x и y.

V. Рѣшить систему

$$x + y = a, \quad x^5 + y^5 = d^5.$$

Отв. Вычисляютъ произведенie xy аналогичнымъ путемъ; находятъ.

$$xy = \frac{a^2}{2} \pm \frac{\sqrt{5a(a^5 + 4d^5)}}{10a}.$$

VI. Рѣшить систему

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{b^2}.$$

Отв. Принимаютъ $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ за неизвѣстныя и приходятъ къ системѣ **§ 283**-го подъ пунктомъ 3.

VII. Рѣшить систему

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad x + y = b.$$

Отв. Приходятъ къ той же системѣ, принимая за неизвѣстныя $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$.

VIII. Рѣшить систему

$$x^{\frac{3}{4}} + y^{\frac{3}{5}} = 35, \quad x^{\frac{1}{4}} + y^{\frac{1}{5}} = 5.$$

Отв. Принимаютъ $x^{\frac{1}{4}}$ и $y^{\frac{1}{5}}$ за неизвѣстныя и приходятъ къ упражненiю III.

IX. Рѣшить систему

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{61}{\sqrt{xy}} + 1, \quad \sqrt[4]{x^3y} + \sqrt[4]{xy^3} = 78.$$

Отв. Принимаютъ за неизвѣстныя $x + y$ и xy; находятъ:

$$x = 81, \quad y = 16.$$

X. Рѣшить систему

$$x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y}, \quad x^2 + y^2 = 34.$$

Отв. Не трудно найти:

$$1)\ x = \pm 5,\ y = \pm 3; \quad 2)\ x = \pm\sqrt{\frac{59}{2}},\ y = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}.$$

XI. Рѣшить систему

$$\begin{cases} (x+y)(xy+1) = 18xy, \\ (x^2+y^2)(x^2y^2+1) = 208x^2y^2. \end{cases}$$

Отв. Дѣлятъ первое уравненіе на xy, второе на x^2y^2; затѣмъ обозначаютъ $x + \frac{1}{x}$ черезъ u, $y + \frac{1}{y}$ черезъ v и приходятъ къ двумъ уравненіямъ:

$$v + u = 18, \quad v^2 + u^2 = 212,$$

откуда уже не трудно получить:

$$x = 7 \pm 4\sqrt{3},\ y = 2 \pm \sqrt{3}.$$

XII. Рѣшить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}} = a, \\ x + y + 3\sqrt[3]{bxy} = b. \end{cases}$$

Отв. Замѣчаютъ, что первое уравненіе можетъ быть написано въ видѣ

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

и что второе есть кубъ слѣдующаго:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{b}.$$

Такимъ образомъ, полагая $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[3]{y} = v$, приходятъ къ системѣ § 283-го подъ пунктомъ 3. Но такъ какъ послѣднее уравненіе не такое общее, какъ второе изъ данныхъ, то будутъ получены не всѣ рѣшенія.

XIII. Рѣшить систему

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}=a,\quad \frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=b.$$

Отв. Полагая $\sqrt[3]{\frac{b+a}{b-a}} = r$, легко получають изъ данныхъ уравненій

$$x = ry,\ y = \frac{a(1+r)}{1+r+r^2},\ x = \frac{ar(1+r)}{1+r+r^2}.$$

XIV. Рѣшить систему

$$\frac{xy}{z}=a,\quad \frac{xz}{y}=b,\quad \frac{yz}{x}=c.$$

Отв. $x^2=ab,\ y^2=ac,\ z^2=bc.$

XV. Рѣшить систему

$$x(y+z)=2p,\quad y(z+x)=2q,\quad z(x+y)=2r.$$

Отв. Сначала безъ труда получають:

$$xy = p+q-r,\quad xz = p+r-q,\quad yz = q+r-p,$$

а затѣмъ,

$$x=\sqrt{\frac{(p+q-r)(p+r-q)}{q+r-p}},\quad y=\sqrt{\frac{(p+q-r)(q+r-p)}{p+r-q}},$$

$$z=\sqrt{\frac{(p+r-q)(q+r-p)}{p+q-r}}.$$

XVI. Рѣшить систему

$$xy^2z^3=4725,\quad \frac{yz^2}{x}=6\frac{3}{7},\quad \frac{z}{x^2y}=\frac{3}{245}.$$

Отв. $x=7,\ y=5,\ z=3.$

XVII. Рѣшить систему

$$x+y+z=13,\quad x^2+y^2+z^2=61,\quad 2yz=x(z+y).$$

Отв. Безъ труда исключають y и z; находять $x=4$ и $x=9$. Такимъ образомъ ставуть извѣстны $y+z$ и yz, откуда выводять y и z. Значенія, соотвѣтствующія $x=9$, будуть мнимыя; соотвѣтствующія же $x=4$, будуть $y=3,\ z=6$.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Рѣшеніе и изслѣдованіе задачъ степени выше первой

I. Задачи съ одною неизвѣстною

§ 286. Задача 1. — *Вычислить глубину колодца, зная, что звукъ отъ удара камня о его дно достигаетъ нашего уха черезъ* θ *секундъ съ того момента, когда камень былъ брошенъ.* (Сопротивленіемъ воздуха можно пренебречь).

Для рѣшенія этой задачи надо вспомнить два принципа физики:

1 Пространство, проходимое свободно-падающимъ тѣломъ, пропорціонально квадрату времени t, протекшаго отъ начала паденія. оно выражается формулою $\frac{gt^2}{2}$, гдѣ g постоянный коэффиціентъ, равный $9^m,80896$

2. Звукъ распространяется равномѣрно со скоростью 333 метровъ въ секунду. При рѣшеніи нашей задачи скорость звука будемъ обозначать черезъ v, такъ что пространство, пройденное въ теченіи времени t, выразится черезъ vt.

Называя глубину колодца въ метрахъ черезъ x, и время, въ теченіе котораго камень падалъ, черезъ t_1 секундъ, можемъ написать:

$$x = \frac{gt_1^2}{2}, \quad \text{откуда } t_1 = \sqrt{\frac{2x}{g}}. \tag{1}$$

Обозначая черезъ t_2 время, потраченное звукомъ на прохожденіе глубины колодца, будемъ имѣть:

$$x = vt_2, \quad \text{откуда } t_2 = \frac{x}{v}. \tag{2}$$

По условію $t_1 + t_2 = \theta$; слѣдовательно, уравненіе задачи напишется такъ.

$$\frac{x}{v} + \sqrt{\frac{2x}{g}} = \theta \tag{3}$$

Для рѣшенія этого уравненія, содержащаго радикалъ, уединяемъ послѣдній:

$$\theta - \frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2x}{g}}, \tag{4}$$

возвышаемъ обѣ части въ квадратъ:

$$\theta^2 - 2\frac{\theta x}{v} + \frac{x^2}{v^2} = \frac{2x}{g}, \tag{5}$$

и, наконецъ, переносимъ всѣ члены въ первую часть и располагаемъ по степенямъ неизвѣстной.

$$\frac{x^2}{v^2} - 2x\left(\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g}\right) + \theta^2 = 0 \tag{6}$$

Отсюда

$$x = \frac{\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{\theta^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}$$

Изслѣдованіе.—Оба корня—вещественные, такъ какъ подъ знакомъ радикала находится, очевидно, положительное количество.

Кромѣ того не трудно замѣтить, что оба корня—положительные, такъ какъ уравненіе (6) показываетъ, что какъ произведеніе корней, $\theta^2 v^2$, такъ и сумма ихъ, $2\left(\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g}\right)v^2$, положительны. А съ другой стороны, очевидно, что задача не можетъ имѣть больше одного рѣшенія, такъ какъ два колодца различной глубины не могутъ соотвѣтствовать одному и тому же значенію θ. Чтобы объяснить существованіе двухъ найденныхъ корней и рѣшить, какой изъ нихъ отвѣчаетъ на предложенный вопросъ, замѣтимъ, что, возвышая въ квадратъ обѣ части уравненія (4), мы получили новое уравненіе, не равносильное первому, такъ какъ хотя ему и удовлетворяютъ всѣ корни уравненія (4), но оно можетъ сверхъ того имѣть и другіе корни, не удовлетворяющіе уравненію (4). Дѣйствительно, обѣ части уравненія (4) имѣли бы одинаковые квадраты и тогда, когда, оставаясь равными по абсолютной величинѣ, имѣли бы противоположные знаки. Уравненіе (5) на самомъ дѣлѣ равносильно двумъ слѣдующимъ (§ 126):

$$\theta - \frac{x}{v} = \sqrt{\frac{2x}{g}}, \quad \theta - \frac{x}{v} = -\sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Но изъ этихъ уравненій только первое соотвѣтствуетъ предложенной задачѣ, а потому его рѣшеніе и будетъ рѣшеніемъ задачи. Это рѣшеніе меньше $v\theta$, такъ какъ $\theta - \frac{x}{v}$, а вмѣстѣ съ нимъ и $v\theta - x$, положительны; напротивъ, рѣшеніе второго уравненія больше $v\theta$, потому что $\theta - \frac{x}{v}$ отрицательно. Слѣдовательно, послѣднее рѣшеніе есть большій изъ корней уравненія (5); онъ долженъ быть отброшенъ, какъ посторонній. Такимъ образомъ, искомое рѣшеніе слѣдующее:

$$x = \frac{\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g} - \sqrt{\left(\frac{\theta}{v} + \frac{1}{g}\right)^2 - \frac{\theta^2}{v^2}}}{\frac{1}{v^2}}.$$

Замѣтимъ, что въ уравненіи (6), изъ котораго получено это рѣшеніе, v обозначаетъ скорость звука, равную приблизительно 333 метр.; поэтому v^2 — довольно большое число, а $\frac{1}{v^2}$, служащее коэффиціентомъ при x^2, очень мало, и притомъ искомое рѣшеніе—наименьшій изъ двухъ корней. Слѣдовательно, мы можемъ къ разысканію его примѣнить формулы § 263-го; по первой изъ нихъ мы получимъ:

$$x = \frac{\theta^2}{\frac{2}{g} + \frac{2\theta}{v}}. \tag{a}$$

Этою формулою и слѣдуетъ пользоваться въ приложеніяхъ. Въ самомъ дѣлѣ, $\frac{1}{v^2}$ почти $\frac{1}{100000}$; и такъ какъ единица длины есть метръ, то можно безъ всякаго неудобства пренебречь количествами порядка $\frac{1}{v^2}$.

Наконецъ, замѣчая, что при v очень большомъ $\frac{2\theta}{v}$ очень мало, мы можемъ упростить формулу (a), отбросивъ $\frac{2\theta}{v}$; тогда получимъ:

$$x = \frac{g\theta^2}{2};$$

эта формула будетъ соотвѣтствовать предположенію, что скорость звука безконечно велика. Для опредѣленія члена поправки, полагаемъ:

$$x = \frac{g\theta^2}{2} + \alpha.$$

Поправку α найдемъ изъ уравненія:

$$\frac{\theta^2}{\frac{2}{g} + \frac{2\theta}{v}} = \frac{g\theta^2}{2} + \alpha,$$

которое, по освобожденіи отъ знаменателя первой дроби, преобразуется въ слѣдующее:

$$0 = \frac{2\alpha}{g} + \frac{g\theta^3}{v} + \frac{2\alpha\theta}{v}.$$

Пренебрегая членомъ $\frac{2\alpha\theta}{v}$, *который очень малъ, такъ какъ множителями его одновременно служатъ* α и $\frac{1}{v}$, получимъ:

$$\alpha = -\frac{g^2\theta^3}{2v};$$

слѣдовательно, за приближенное значеніе x можно принять:

$$x = \frac{g\theta^2}{2} - \frac{g^2\theta^3}{2v}. \tag{b}$$

Эту же формулу можно было бы получить посредствомъ дѣленія θ^2 на $\left(\frac{2}{g}+\frac{2\theta}{v}\right)$, ограничиваясь при этомъ только двумя первыми членами частнаго.

§ 287. Задача II. — *Раздѣлить прямую AB на двѣ такія части, чтобы большая часть AX была среднею пропорціональною между меньшею частью и всею прямою.*

A ———— X ——— B

Пусть a будетъ длина AB, обозначивъ AX черезъ x и, слѣдовательно, BX черезъ $(a-x)$, мы составимъ, по условію задачи, пропорцію

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{a-x}, \tag{1}$$

откуда

$$x^2=a(a-x), \quad \text{или} \quad x^2+ax-a^2=0. \tag{2}$$

Рѣшая это уравненіе, находимъ

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{5a^2}}{2}=\frac{a(-1\pm\sqrt{5})}{2}. \tag{3}$$

Изслѣдованіе. — Очевидно, оба корня — вещественные; и такъ какъ $\sqrt{5}$ содержится между 2 и 3, то первый корень положителенъ и меньше a, а второй отрицателенъ и по абсолютному значенію больше a. Слѣдовательно, первый корень и есть рѣшеніе задачи; второй же долженъ быть отброшенъ.

Но и это отрицательное рѣшеніе можно все-таки истолковать. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ его черезъ $(-x)$; такъ какъ уравненіе (2) должно удовлетворяться этимъ значеніемъ, то у насъ будетъ:

$$(-x)^2=a[a-(-x)], \text{ или } x^2=a(a+x).$$

Такимъ образомъ x есть средняя пропорціональная между a и $(a+x)$ и, очевидно, отвѣчаетъ на слѣдующій вопросъ:

На продолженіи прямой AB найти такую точку X', чтобы ея разстояніе x отъ точки A было среднею пропорціональною между разстояніемъ ея $(a+x)$ отъ точки B и линіей $AB=a$.

X' ———— A ——— B

Найденныя два рѣшенія въ общемъ видѣ рѣшаютъ слѣдующую задачу.

На неопредѣленной прямой, на которой взяты точки A и B, найти такую точку X, чтобы разстояніе AX было среднею пропорціональною между BX и AB.

Случается, что, какъ въ большинствѣ задачъ первой степени, отрицательное рѣшеніе должно быть отложено на прямой AB въ направленіи, противоположномъ тому, въ какомъ откладывается положительное рѣшеніе.

Можно было бы избѣжать отрицательнаго рѣшенія, отсчитывая разстоянія отъ точки B. Дѣйствительно, обозначая черезъ x разстояніе BX (1-ая фиг.) и, слѣдовательно, черезъ $(a - x)$ разстояніе AX, мы имѣли бы пропорцію

$$\frac{a}{a-x} = \frac{a-x}{x},$$

откуда

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0. \qquad (4)$$

Рѣшая это уравненіе, находимъ корни:

$$x = \frac{a(3 \pm \sqrt{5})}{2}. \qquad (5)$$

Оба рѣшенія положительны; первое больше a и даетъ точку X', второе меньше a и даетъ точку X.

Построеніе рѣшеній. — Формулы (3), или равносильныя имъ

$$x' = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} - \frac{a}{2}, \quad x'' = -\left(\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2} + \frac{a}{2}\right),$$

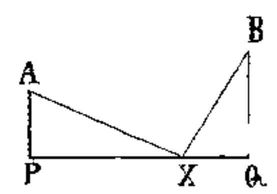
непосредственно приводятъ къ построенію, которое дается въ *Началахъ геометріи*. На самомъ дѣлѣ, $\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$ есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, катеты котораго равны AB и $\frac{A\text{[redacted]}}{2}$; слѣдовательно, для построенія x' надо отъ гипотенузы отнять $\frac{AB}{2}$, а для построенія абсолютной величины x'' надо эти двѣ длины сложить; при этомъ x' откладываемъ отъ A къ B, а x'' въ противоположномъ направленіи.

Замѣтимъ еще, что уравненіе (2) можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$x(x + a) = a^2,$$

а потому предложенная задача приводится къ такой: *Найти двѣ длины x и $x + a$, разность которыхъ есть a и средняя пропорціональная также a.* Эта задача рѣшается въ геометріи и приводится къ предыдущему построенію.

§ 288. Задача III.—*На прямой PQ найти точку X, одинаково освѣщаемую двумя источниками свѣта A и B, силы свѣта которыхъ i и i'. Дано, что AP = a, BQ = b и PQ = d; AP и BQ изображаютъ перпендикуляры опущенные изъ точекъ A и B на прямую PQ.*



Для рѣшенія этой задачи вспомнимъ, что сила освѣщенія обратно пропорціональна квадрату разстоянія освѣщенной точки отъ свѣтящейся, такъ что источникъ, сила котораго i, освѣщаетъ предметъ, находящійся на разстояніи x, съ силою $\frac{i}{x^2}$. Поэтому должно существовать равенство

$$\frac{i}{\overline{AX}^2} = \frac{i'}{\overline{BX}^2}.$$

Обозначая PX черезъ x и, слѣдовательно, QX черезъ $(d - x)$, напишемъ:

$$\frac{i}{a^2 + x^2} = \frac{i'}{b^2 + (d - x)^2}, \qquad (1)$$

что, по освобожденіи отъ знаменателей, дастъ:

$$[b^2 + (d - x)^2]i = (a^2 + x^2)i' \qquad (2)$$

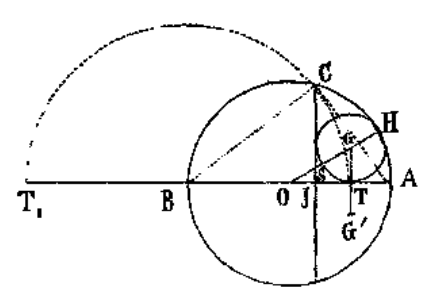
Изслѣдованіе.—Не входя въ подробности рѣшенія этого уравненія второй степени и условій возможности задачи, постараемся истолковать отрицательныя рѣшенія, какія оно можетъ имѣть. Обозначая такое рѣшеніе черезъ $(-x)$ и принимая во вниманіе, что оно должно удовлетворять уравненію (1), будемъ имѣть.

$$\frac{i}{a^2 + x^2} = \frac{i'}{b^2 + (d + x)^2}. \qquad (3)$$

Какъ разъ такое уравненіе мы должны были бы составить, еслибы искали точку X влѣво отъ P, обозначивъ ея неизвѣстное разстояніе отъ точки P черезъ x. Слѣдовательно, и отрицательные корни служатъ рѣшеніями предложенной задачи, если мы будемъ откладывать выражаемыя ими длины влѣво отъ точки P, т.-е. въ направленіи, противоположномъ тому, которое соотвѣтствуетъ положительнымъ рѣшеніямъ.

§ 289. Задача IV.—*Даны: кругъ съ центромъ O, одинъ изъ его діаметровъ AB и хорда CD, перпендикулярная къ AB: начертить кругъ, касательный заразъ къ кругу O, къ діаметру и къ хордѣ.*

Пусть $OA = R$, $OJ = a$. Требуется вписать кругъ G въ секторъ AJC. Примемъ за неизвѣстную его радіусъ и положимъ $GT = JT = x$. Прямая OG, соединяющая центры, пройдетъ черезъ точку касанія H двухъ круговъ и пересѣчетъ неизвѣстный кругъ въ точкѣ S. Касательная OT есть средняя пропорціональная между всею сѣкущею OH и ея внѣшнею частью OS; слѣдовательно,



$$OT^2 = OH \times OS, \quad \text{или} \quad (a+x)^2 = R(R-2x). \tag{1}$$

Раскрывая скобки и располагая по степенямъ неизвѣстной, получаемъ:

$$x^2 + 2(R+a)x - R^2 + a^2 = 0, \tag{2}$$

откуда

$$x = -(R+a) \pm \sqrt{(R+a)^2 + (R^2 - a^2)},$$

или, послѣ упрощенія подъ корнемъ,

$$x = -(R+a) \pm \sqrt{2R(R+a)} \tag{3}$$

Изслѣдованіе. — Оба корня, очевидно вещественные, потому что $2R(R+a)$ — положительное количество; и такъ какъ a меньше R, то по уравненію (2) заключаемъ, что одинъ корень — положительный, а другой — отрицательный.

Положительное рѣшеніе x' очень легко построить, замѣтивъ, что радикалъ есть средняя пропорціональная между $2R$ и $R+a$, или, что одно и то же, между BA и BJ, и что, слѣдовательно, онъ равенъ BC. Итакъ,

$$x' = BC - BJ.$$

Взявъ, поэтому, $BT = BC$, найдемъ отрѣзокъ JT, равный x'; онъ и будетъ искомымъ радіусомъ. Для нахожденія центра возставимъ въ T перпендикуляръ TG къ линіи AB и отложимъ на немъ отрѣзокъ, равный JT.

Что касается отрицательнаго рѣшенія x'', то по абсолютному значенію оно равно $BC + BJ$. Для истолкованія этого рѣшенія, замѣтимъ, что оно должно удовлетворять уравненію (1), т.-е., обозначая его черезъ $(-z)$, мы можемъ написать:

$$(a - z)^2 = R(R+2z), \quad \text{или} \quad (z - a)^2 = R(R+2z). \tag{4}$$

Такое, именно, уравненіе пришлось бы составить, еслибы требовалось начертить кругъ, касательный внѣшнимъ образомъ къ дугѣ BC и къ продолженіямъ діаметра и хорды, и еслибы при этомъ мы обозначили радіусъ искомаго круга черезъ a; въ этомъ легко убѣдиться, сдѣлавъ соотвѣтствующій чертежъ. Такимъ образомъ, отрицательный корень даетъ второе рѣшеніе задачи; и для нахожденія точки касанія T' новаго круга и діаметра AB достаточно отложить на этомъ діаметрѣ влѣво отъ B длину BT_1, равную BC.

При этомъ можно еще замѣтить, что радіусы $JT = BC - BJ$ и $JT_1 = BC + BJ$ откладываются въ противоположныя стороны отъ J, какъ указываютъ знаки при ихъ абсолютныхъ величинахъ въ формулахъ (3).

Очевидно, что точки T и T' являются также точками касанія двухъ другихъ круговъ, равныхъ первымъ, при чемъ центры ихъ расположены ниже діаметра AB симметрично съ центрами двухъ первыхъ круговъ; они также отвѣчаютъ вопросу.

Если теперь поставимъ себѣ задачу—вписать кругъ въ секторъ BJC, то съ помощью подобныхъ же разсужденій придемъ къ уравненію

$$(x + a)^2 = R(R - 2x), \qquad (5)$$

которое отличается отъ (1) и не можетъ быть къ нему сведено посредствомъ измѣненія знака при x. Не входя въ подробности этого новаго рѣшенія, скажемъ только, что отрицательный корень будетъ соотвѣтствовать кругу, касательному внѣшнимъ образомъ къ дугѣ AC, и что точки касанія двухъ круговъ съ діаметромъ AB мы получимъ, описавъ изъ A, какъ изъ центра, полуокружность радіусомъ AC.

Мы видимъ, что задача имѣетъ восемь рѣшеній, получаемыхъ изъ двухъ уравненій второй степени.

§ 290. Задача V.—*Раздѣлить площадь круга радіуса R концентрической окружностью въ крайнемъ и среднемъ отношеніи.*

Можно сдѣлать два предположенія 1) что среднею пропорціональною будетъ площадь, заключенная между двумя окружностями, 2) что среднею пропорціональною будетъ площадь неизвѣстнаго круга.

Въ первомъ случаѣ, обозначивъ радіусъ искомаго круга черезъ x, составляемъ уравненіе задачи

$$\frac{\pi R^2}{\pi(R^2 - x^2)} = \frac{\pi(R^2 - x^2)}{\pi x^2},$$

или

$$(R^2 - x^2)^2 = R^2x^2, \qquad (1)$$

откуда

$$R^2 - x^2 = Rx, \quad \text{или} \quad R^2 - x^2 = -Rx.$$

Первое изъ этихъ уравненій даетъ:

$$x = \frac{R(-1 \pm \sqrt{5})}{2}; \qquad (2)$$

второе же, отличающееся отъ перваго только знакомъ при x, даетъ:

$$x = \frac{R(1 \pm \sqrt{5})}{2}. \qquad (3)$$

Изслѣдованіе.—Эти четыре корня попарно равны по абсолютной величинѣ, но противоположны по знаку. Въ разсматриваемомъ геометрическомъ вопросѣ отрицательные корни не имѣютъ значенія и потому должны быть отброшены. Что касается положительныхъ корней, то *первый*,

$$x = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2},$$

представляетъ большую часть радіуса R, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи: онъ прямо отвѣчаетъ на вопросъ *дѣленія*. *Второй корень*,

$$x = \frac{R(\sqrt{5} + 1)}{2}$$

есть линія, при дѣленіи которой въ крайнемъ и среднемъ отношеніи большій отрѣзокъ былъ бы равенъ R. Это рѣшеніе, будучи больше R, удовлетворяетъ не предложенной задачѣ, а другой, которая является обобщеніемъ первой, именно.

Построить кругъ, концентрическій съ даннымъ, такой, чтобы площадь кольца была средней пропорціональной между площадями двухъ круговъ.

Это новое изложеніе не требуетъ, чтобы неизвѣстный радіусъ былъ меньше R. Полагая, что онъ больше R, увидимъ, что новое уравненіе

$$(x^2 - R^2)^2 = R^2x^2$$

не отличается отъ уравненія (1); слѣдовательно, и второе, и первое рѣшенія будутъ удовлетворять задачѣ.

Предположимъ теперь, что среднею пропорціональною между площадями даннаго круга и кольца будетъ площадь неизвѣстнаго круга; тогда уравненіе задачи будетъ слѣдующее:

$$\frac{\pi R^2}{\pi x^2} = \frac{\pi x^2}{\pi(R^2 - x^2)}, \quad \text{или} \quad x^4 + R^2x^2 - R^4 = 0. \qquad (4)$$

Это биквадратное уравненіе можно было бы рѣшить по извѣстнымъ правиламъ, но проще положить:

$$x^2 = Ry; \qquad (5)$$

тогда по раздѣленіи на R^2 уравненіе (4) приметъ видъ:

$$y^2 + Ry - R^2 = 0; \qquad (6)$$

это уравненіе тождественно съ первымъ уравненіемъ перваго случая. Отсюда заключаемъ, что отрицательное значеніе y должно быть отброшено, а *положительное значеніе представляетъ бо́льшую часть радіуса, раздѣленнаго въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Что касается радіуса x неизвѣстнаго круга, то, на основаніи уравненія* (5), *онъ равенъ средней пропорціональной между радіусомъ даннаго круга и значеніемъ y.*

Не трудно построить всѣ три рѣшенія этой задачи.

II. Задачи съ нѣсколькими неизвѣстными

§ 291. Задача VI.—*Вычислить катеты прямоугольнаго треугольника, зная гипотенузу a и высоту h, опущенную изъ вершины прямого угла на гипотенузу.*

Пусть x и y будутъ неизвѣстные катеты, теорема Пиѳагора даетъ первое уравненіе:

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{1}$$

Площадь треугольника, выраженная формулами $\frac{xy}{2}$ и $\frac{ah}{2}$, даетъ второе уравненіе:

$$xy = ah. \tag{2}$$

Удваивая обѣ части уравненія (2) и складывая затѣмъ съ уравненіемъ (1), получимъ:

$$x^2 + y^2 + 2xy = a^2 + 2ah, \quad \text{или} \quad (x + y)^2 = a^2 + 2ah.$$

Такъ какъ обѣ части послѣдняго уравненія положительны, то извлекая изъ нихъ квадратный корень, мы можемъ написать:

$$x + y = \sqrt{a^2 + 2ah} \tag{3}$$

Наоборотъ, вычитая удвоенное уравненіе (2) изъ (1), будемъ имѣть:

$$(x - y)^2 = a^2 - 2ah.$$

Предполагая, что x — бо́льшій изъ катетовъ, извлекаемъ корень изъ обѣихъ частей предыдущаго уравненія:

$$x - y = \sqrt{a^2 - 2ah} \tag{4}$$

Зная же сумму (3) и разность (4) неизвѣстныхъ, находимъ самыя неизвѣстныя:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2ah} + \sqrt{a^2 - 2ah}\right), \\ y &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + 2ah} - \sqrt{a^2 - 2ah}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Изслѣдованіе. — Необходимое и достаточное условіе возможности задачи состоитъ въ томъ, чтобы значенія x и y были вещественными, т.-е. чтобы было:

$$a > 2ah, \quad \text{или} \quad h < \frac{a}{2}. \qquad (6)$$

§ 292. Замѣчаніе.—Эти неравенства (6) не исключаютъ предѣльныхъ значеній:

$$a = 2h, \quad h = \frac{a}{2},$$

такъ какъ и при такомъ предположеніи значенія x и y остаются вещественными и положительными. Итакъ, эти равенства отвѣчаютъ на два слѣдующихъ вопроса:

1. *Какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ съ данною высотою h имѣетъ наименьшую гипотенузу?*

Это треугольникъ, гипотенуза котораго равна $2h$; онъ равнобедренный, потому что въ этомъ случаѣ

$$x = y = h\sqrt{2}$$

2. *Какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ съ одною и тою же гипотенузою a имѣетъ наибольшую высоту?*

Это—треугольникъ, высота котораго равна $\frac{a}{2}$; онъ равнобедренный потому что въ этомъ случаѣ

$$x = y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

§ 293. Задача VII.—*Опредѣлить стороны прямоугольнаго треугольника, зная его площадь m^2 и его периметръ $2p$*

Пусть x и y будутъ катеты, а z—гипотенуза треугольника. По условію задачи и на основаніи извѣстныхъ теоремъ имѣемъ:

$$z^2 = x^2 + y^2 \qquad (1)$$

$$x + y + z = 2p. \qquad (2)$$

$$2m^2 = xy. \qquad (3)$$

Умножая обѣ части третьяго уравненія на 2 и складывая результатъ съ первымъ, получимъ:

$$z^2 + 4m^2 = x^2 + y^2 + 2xy, \quad \text{или} \quad z^2 + 4m^2 = (x+y)^2 \qquad (4)$$

Второе же уравненіе даетъ:

$$x + y = 2p - z, \quad \text{откуда} \quad (x+y)^2 = (2p - z)^2. \qquad (5)$$

Приравниваемъ другъ другу оба значенія $(x+y)^2$ изъ уравненій (4) и (5):

$$(2p-z)^2=z^2+4m^2,$$

или, послѣ раскрытія скобокъ въ первой части, приведенія подобныхъ членовъ и дѣленія обѣихъ частей на 4,

$$p^2-pz=m^2,$$

откуда

$$z=\frac{p^2-m^2}{p} \qquad (6)$$

Найдя z, изъ уравненій (2) и (3) опредѣляемъ $(x+y)$ и xy:

$$x+y=2p-z=\frac{p^2+m^2}{p},\ xy=2m^2;$$

слѣдовательно, x и y суть корни квадратнаго уравненія:

$$u^2-\frac{p^2+m^2}{p}u+2m^2=0,$$

т.-е

$$\left.\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right\}=\frac{p^2+m^2}{2p}\pm\sqrt{\left(\frac{p^2+m^2}{2p}\right)^2-2m^2} \qquad (7)$$

Изслѣдованіе.—Такъ какъ значеніе (6) для z должно быть положительнымъ, то одно изъ условій возможности задачи выразится неравенствомъ:

$$p>m$$

Но это условіе недостаточно: сверхъ этого, значенія x и y должны быть вещественными и положительными. Но уравненіе, изъ котораго опредѣляемъ x и y, показываетъ, что если они вещественны, то оба они въ то же время и положительны, поэтому, достаточно написать условіе ихъ вещественности, т.-е. что

$$\frac{(p^2+m^2)^2}{4p^2}-2m^2>0,\ \text{или}\ (p^2+m^2)^2-8p^2m^2>0.$$

Разсматривая первую часть, какъ разность двухъ квадратовъ, можемъ представить неравенство въ такомъ видѣ:

$$(p^2+m^2+2pm\sqrt{2})(p^2+m^2-2pm\sqrt{2})>0.$$

Здѣсь первый множитель—положителенъ, а потому необходимо, чтобы было

$$p^2+m^2-2pm\sqrt{2}>0. \qquad (8)$$

Таково условіе, которому должны удовлетворять p и m; изъ него можно вывести предѣлы, между которыми можетъ измѣняться p при данномъ m, или m—при данномъ p. Оба эти результата мы получимъ сразу, полагая $\frac{p}{m} = r$. Въ самомъ дѣлѣ, дѣля обѣ части неравенства (8) на m^2, находимъ,

$$r^2 - 2r\sqrt{2} + 1 > 0.$$

Здѣсь первый членъ положителенъ; поэтому, чтобы неравенство удовлетворялось, r должно быть болѣе наибольшаго или меньше наименьшаго изъ корней уравненія $r^2 - 2r\sqrt{2} + 1 = 0$, т.-е. больше $(\sqrt{2}+1)$ или меньше $(\sqrt{2}-1)$. Но p, какъ мы видѣли, больше m; слѣдовательно, отношеніе $\frac{p}{m}$ не можетъ быть меньше $(\sqrt{2}-1)$, а потому *необходимо, чтобы $\frac{p}{m}$ было больше* $(\sqrt{2}+1)$. Это условіе заключаетъ въ себѣ и первое и является, поэтому, единственнымъ условіемъ возможности задачи.

§ 294. Замѣчаніе.—Прямоугольный треугольникъ, периметръ котораго $2p$ и площадь m^2, возможенъ только въ томъ случаѣ, если

$$\frac{p}{m} > \sqrt{2}+1;$$

отсюда заключаемъ, что

$$m < \frac{p}{\sqrt{2}+1}, \quad \text{или} \quad m < p(\sqrt{2}-1),$$

и

$$p > m(\sqrt{2}+1)$$

Эти неравенства не исключаютъ предѣльныхъ равенствъ,

$$m = p(\sqrt{2}-1), \quad p = m(\sqrt{2}+1),$$

потому что и при такихъ предположеніяхъ значенія неизвѣстныхъ остаются вещественными и положительными. Эти предѣльныя значенія отвѣчаютъ на два слѣдующихъ вопроса

1. *Какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ съ однимъ и тѣмъ же периметромъ $2p$ имѣетъ наибольшую площадь?*

Это—треугольникъ, площадь котораго есть $m^2 = p^2(\sqrt{2}-1)^2$. Онъ — равнобедренный, такъ какъ катеты его будутъ: $x = y = p(2-\sqrt{2})$; гипотенуза $z = 2p(\sqrt{2}-1)$.

2. *Какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ съ одною и тою же площадью m^2 имѣетъ наименьшій периметръ?*

Это—треугольникъ, периметръ котораго есть $2p = 2m(\sqrt{2}+1)$. Онъ — равнобедренный, такъ какъ катеты его будутъ: $x = y = m\sqrt{2}$; гипотенуза $z = 2m$.

§ 295. Задача VIII.—*Вписать въ шаръ радіуса R цилиндръ, полная поверхность котораго (включая сюда площади обоихъ основаній) равна площади круга съ даннымъ радіусомъ m.*

Обозначая радіусъ основанія цилиндра черезъ x, высоту его черезъ y, получимъ непосредственно изъ геометріи уравненія

$$x^2 + \frac{y^2}{4} = R^2, \quad 2\pi x^2 + 2\pi xy = \pi m^2; \tag{1}$$

послѣднее уравненіе, по сокращеніи на множитель π, приметъ видъ:

$$2x^2 + 2xy = m^2. \tag{2}$$

Изъ уравненія (2) выводимъ:

$$y = \frac{m^2 - 2x^2}{2x}$$

и, подставляя это значеніе въ уравненіе (1), пишемъ.

$$x^2 + \frac{(m^2 - 2x^2)^2}{16x^2} = R^2.$$

Освобождаясь отъ знаменателя и дѣлая приведеніе подобныхъ членовъ, приходимъ къ биквадратному уравненію

$$20x^4 - (4m^2 + 16R^2)x^2 + m^4 = 0, \tag{3}$$

откуда

$$x^2 = \frac{(m^2 + 4R^2) \pm \sqrt{(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4}}{10}, \tag{4}$$

и, слѣдовательно,

$$x = \sqrt{\frac{(m^2 + 4R^2) \pm \sqrt{(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4}}{10}}. \tag{5}$$

Изслѣдованіе.—При одномъ взглядѣ на биквадратное уравненіе (3) замѣчаемъ, что если значенія x^2 вещественны, то оба они въ то же время положительны; слѣдовательно, каждое изъ нихъ дастъ по одному вещественному и положительному значенію x. Но условія, что x—вещественное и положительное, еще не достаточно: необходимо, чтобы и y было такимъ же. А потому должно быть

$$m^2 - 2x^2 > 0, \text{ или } x < \frac{m}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

Итакъ, задача будетъ имѣть столько рѣшеній, сколько значеній x, получаемыхъ изъ формулы (5), удовлетворитъ этому условію (6).

Чтобы задача была возможна, необходимо прежде всего, чтобы значенія x были вещественными; для этого, какъ уже было сказано, доста-

точно, чтобы значенія x^2 были также вещественными, а это условіе требуетъ только слѣдующаго неравенства:

$$(m^2+4R^2)^2-5m^4>0,$$

или

$$\left(m^2+4R^2-m^2\sqrt{5}\right)\left(m^2+4R^2+m^2\sqrt{5}\right)>0$$

А такъ какъ второй множитель положителенъ, то необходимо

$$m^2+4R^2-m^2\sqrt{5}>0,$$

откуда

$$m^2<\frac{4R^2}{\sqrt{5}-1}, \quad \text{или} \quad m^2<R^2\left(\sqrt{5}+1\right). \qquad (7)$$

Если это условіе выполнено, то наименьшее изъ значеній x всегда отвѣчаетъ на вопросъ, такъ какъ оно удовлетворяетъ въ то же время и неравенству (6), т.-е

$$\frac{m^2+4R^2-\sqrt{(m^2+4R^2)^2-5m^4}}{10}<\frac{m^2}{2},$$

или, по освобожденіи отъ знаменателей и перенесеніи членовъ,

$$4(R^2-m^2)<\sqrt{(4R^2+m^2)^2-5m^4}.$$

И въ самомъ дѣлѣ, если m больше R, это неравенство очевидно; а если, напротивъ, m меньше R, то, возвысивъ обѣ части неравенства въ квадратъ, что возможно въ силу **§ 204**-го, такъ какъ обѣ онѣ положительны мы получимъ:

$$16(R^4-2R^2m^2+m^4)<16R^4+8R^2m^2+m^4-5m^4,$$

или

$$20m^4-40R^2m^2<0, \quad \text{откуда} \quad m^2<2R^2,$$

что справедливо (не противорѣчитъ второму предположенію). *Итакъ, задача всегда имѣетъ рѣшеніе, если выполнено условіе* (7).

Чтобы наибольшее изъ значеній x также служило рѣшеніемъ задачи, должно имѣть мѣсто неравенство

$$\frac{m^2+4R^2+\sqrt{(m^2+4R^2)^2-5m^4}}{10}<\frac{m^2}{2},$$

или, по освобожденіи отъ знаменателей и приведеніи подобныхъ членовъ,

$$\sqrt{(m^2+4R^2)^2-5m^4}<4(m^2-R^2).$$

Но при m меньшемъ R это неравенство невозможно, и, слѣдовательно, второго рѣшенія не существуетъ. При m же большемъ R обѣ части неравенства положительны, и потому мы можемъ возвести ихъ въ квадратъ:

$$(m^2 + 4R^2)^2 - 5m^4 < 16(m^2 - R^2)^2, \quad \text{откуда} \quad m^2 > 2R^2$$

Итакъ, для существованія двухъ рѣшеній m^2 должно заключаться между $2R^2$ и $R^2(\sqrt{5} + 1)$.

§ 296. Замѣчаніе. — Разобраться въ полученныхъ результатахъ можно слѣдующимъ образомъ.

Подставляя въ уравненіе (2) на мѣсто y его положительное значеніе, найденное изъ (1), получимъ для полной поверхности цилиндра, вписаннаго въ шаръ, слѣдующее выраженіе:

$$\pi m^2 = 2\pi x(x + 2\sqrt{R^2 - x^2}).$$

Разсматривая послѣдовательныя значенія, черезъ которыя проходитъ эта поверхность, когда радіусъ основанія x возрастаетъ отъ 0 до величины R радіуса шара, видимъ, что она равна нулю при $x = 0$ и возрастаетъ вмѣстѣ съ x до нѣкотораго предѣла. Послѣдній можно вычислить, и, по предыдущему, онъ равенъ $\pi R^2(\sqrt{5} + 1)$, при чемъ значеніе x, дающее этотъ *maximum*, слѣдующее

$$x = \frac{R}{10}\sqrt{10(5 + \sqrt{5})}.$$

При дальнѣйшемъ увеличеніи x до R поверхность уменьшается до значенія $2\pi R^2$, соотвѣтствующаго тому случаю, когда высота равна нулю и цилиндръ приводится къ своимъ двумъ основаніямъ, которыя представляютъ два большихъ круга. Возрастая отъ нуля до *maximum*'а и убывая отъ *maximum*'а до $2\pi R^2$, поверхность цилиндра проходитъ, очевидно, два раза черезъ всѣ значенія, заключающіяся между *maximum*-омъ и $2\pi R^2$, и одинъ разъ черезъ значенія, меньшія $2\pi R^2$.

§ 297. **Нѣкоторыя задачи значительно упрощаются при удачномъ выборѣ неизвѣстной. Разсмотримъ два примѣра:**

Задача IX. — *Найти четыре числа, составляющихъ пропорцію, зная сумму среднихъ $2s$, сумму крайнихъ $2s'$ и сумму квадратовъ всѣхъ четырехъ членовъ $4q^2$.*

Примемъ за неизвѣстную x произведеніе среднихъ членовъ; такъ какъ сумма ихъ $2s$, то по **§ 256**-му они представляютъ корни уравненія

$$z^2 - 2sz + x = 0,$$

т.-е. равны

$$s+\sqrt{s^2-x},\quad s-\sqrt{s^2-x}$$

Такъ какъ произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то также увидимъ, что крайніе члены равны

$$s'+\sqrt{s'^2-x},\quad s'-\sqrt{s'^2-x}$$

Составляя сумму квадратовъ этихъ четырехъ выраженій, находимъ:

$$4s^2+4s'^2-4x,$$

слѣдовательно, уравненіе задачи будетъ:

$$4s^2+4s'^2-4x=4q^2$$

Изъ него опредѣляемъ x; тогда члены пропорціи, по выполненіи всѣхъ дѣйствій, примутъ слѣдующій видъ:

$$s'+\sqrt{q^2-s^2},\quad s+\sqrt{q^2-s'^2},\quad s-\sqrt{q^2-s'^2},\quad s'-\sqrt{q^2-s^2}.$$

Замѣчаніе. — Естественно принять за неизвѣстную произведеніе среднихъ, такъ какъ оно для каждой пропорціи можетъ имѣть только одно значеніе. Разыскивая же, напр., одинъ изъ среднихъ, мы находили бы заразъ (посредствомъ одного и того же вычисленія) оба среднихъ, такъ какъ они въ самомъ условіи задачи ничѣмъ не отличены другъ отъ друга. Слѣдовательно, уравненіе было бы, по крайней мѣрѣ, второй степени.

Чтобы задача была возможна, должны существовать неравенства

$$s^2<q^2,\quad s'^2<q^2.$$

§ 298. Задача X. — *Найти пропорцію, зная сумму $4s$ всѣхъ ея членовъ, сумму $4q^2$ ихъ квадратовъ и сумму $4c^3$ ихъ кубовъ.*

Примемъ за неизвѣстныя разность $4x$ между суммою крайнихъ и суммою среднихъ членовъ и произведеніе y крайнихъ; обозначивъ черезъ a, b, c, d члены пропорціи, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned} a+d+c+b&=4s,\\ a+d-(c+b)&=4x, \end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} a+d&=2s+2x,\\ b+c&=2s-2x. \end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

А такъ какъ

$$ad=y,\quad bc=y,\qquad(3$$

то для a, b, c, d найдемъ слѣдующія значенія (§ 2.6):

$$\left.\begin{aligned} a &= s + x + \sqrt{(s + x)^2 - y}, \\ d &= s + x - \sqrt{(s + x)^2 - y}, \\ b &= s - x + \sqrt{(s - x)^2 - y}, \\ c &= s - x - \sqrt{(s - x)^2 - y}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Отсюда, составляя сумму четырехъ квадратовъ, находимъ:

$$8(s^2 + x^2) - 4y;$$

также напишемъ и сумму четырехъ кубовъ:

$$16s(s^2 + 3x^2) - 12sy$$

Слѣдовательно, будутъ уравненія:

$$\left.\begin{aligned} 8(s^2 + x^2) - 4y &= 4q^2, \\ 16s(s^2 + 3x^2) - 12sy &= 4c^3, \end{aligned}\right\}$$

или, по раздѣленіи на 4 обѣихъ частей каждаго изъ нихъ и перенесеніи членовъ,

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 - y &= q^2 - 2s^2, \\ 12sx^2 - 3sy &= c^3 - 4s^3 \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Рѣшая эту систему, находимъ:

$$x^2 = \frac{c^3 - 3q^2s + 2s^3}{6s}, \quad y = \frac{c^3 - 6q^2s + 8s^3}{3s}.$$

Подставивъ найденныя значенія x и y въ формулы (4), получимъ всѣ четыре члена пропорціи.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Два путешественника отправляются одновременно: одинъ изъ точки B по направленію къ точкѣ C, другой изъ точки C по направленію къ B. Оба идутъ съ постоянною скоростью. Обѣ эти скорости находятся въ такомъ отношеніи, что первый прибываетъ въ C спустя 4 часа послѣ ихъ встрѣчи, а второй — въ B спустя 9 часовъ послѣ встрѣчи. Узнать отношеніе скоростей.

Отв. Называя скорости черезъ x и черезъ y, разстояніе BC черезъ d и разстояніе точки B до точки встрѣчи черезъ z, составляемъ уравненія:

$$\frac{z}{x} = \frac{d - z}{y}, \quad \frac{d - z}{x} = 4, \quad \frac{z}{y} = 9,$$

откуда находимъ:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}.$$

II. Найти такое двузначное число, которое, будучи раздѣлено на произведеніе цифръ, изъ которыхъ оно составлено, дало бы въ частномъ $5\frac{1}{3}$; а если вычесть изъ него 9, то чтобы въ остаткѣ получилось обратное число.

Отв. 32.

III. Найти такое трехзначное число, чтобы средняя цифра была среднею пропорціональною между крайними, чтобы само число находилось въ такомъ же отношеніи къ суммѣ его цифръ, какъ 124 къ 7 и, наконецъ, чтобы послѣ прибавленія къ нему 594 получалось обратное число.

Отв. 248

IV. Найти 5 чиселъ, находящихся въ ариѳметической прогрессіи, зная ихъ сумму $5a$ и ихъ произведеніе p^5.

Отв. Средній членъ равенъ a, а разность прогрессіи y опредѣляется изъ уравненія

$$4ay^4 - 5a^3y^2 + a^5 - p^5 = 0.$$

V. Найти четыре числа, находящихся въ ариѳметической прогрессіи, зная ихъ сумму $4a$ и сумму величинъ, обратныхъ имъ, $\frac{1}{b}$.

Отв. Представляя четыре члена прогрессіи черезъ $x-3y$, $x-y$, $x+y$, $x+3y$, находимъ, что $x=a$ и что y опредѣлится изъ уравненія

$$9y^4 + 10a(2b - a)y^2 + a^4 - 4a^3b = 0.$$

VI. Провести къ кругу C изъ точки A сѣкущую данной длины l и опредѣлить условія возможности построенія. Даны: разстояніе a точки до центра и радіусъ круга R.

Отв. Называя черезъ y перпендикуляръ, опущенный изъ конца сѣкущей на діаметръ, проходящій черезъ точку A, и черезъ x разстояніе основанія этого перпендикуляра до центра, находимъ:

$$x = \frac{R^2 + a^2 - l^2}{2a}, \quad y^2 = \frac{(a+R+l)(a+R-l)(l+R-a)(l+a-R)}{4a^2}.$$

Условія возможности слѣдующія: если точка A находится внѣ круга, то

$$l < a + R, \quad l > a - R,$$

а если точка внутри круга, то

$$l < R + a, \quad l > R - a.$$

VII. Извѣстно, что *полярою* точки A относительно круга радіуса R, центръ котораго находится въ точкѣ O, называется перпендикуляръ къ

OA, проведенный черезъ такую точку X этой прямой, что $OX \times OA = R^2$. Спрашивается, можетъ ли существовать такая точка M въ плоскости двухъ круговъ радіусовъ R и R', которая имѣла бы одну и ту же поляру относительно обоихъ круговъ.

Отв. Для этого необходимо, чтобы круги не пересѣкались; и если это условіе выполнено, то, обозначая черезъ d разстояніе центровъ, найдемъ, что разстояніе x *полюса* до центра круга R выразится слѣдующимъ образомъ

$$x = \frac{d^2 + R^2 - R'^2 \pm \sqrt{(R + R' + d)(R + R' - d)(R - R' + d)(R - R' - d)}}{2d}.$$

VIII. Данъ шаръ радіуса R. Требуется разсѣчь его плоскостью такъ, чтобы объемъ наименьшаго изъ двухъ получающихся при этомъ сферическихъ сегментовъ былъ въ данномъ отношеніи m къ объему конуса съ тѣмъ же основаніемъ и съ вершиною въ центрѣ шара.

Отв. Находимъ, что высота сегмента выразится формулами:

$$x = 0, \quad x = R\frac{3(m+1) - \sqrt{(m+1)(m+9)}}{2(m+1)}.$$

IX. Та же задача, но вершина конуса помѣщена теперь въ концѣ діаметра, перпендикулярнаго къ общему основанію, и, именно, въ томъ концѣ, который находится въ бо́льшемъ изъ сегментовъ.

Отв. Находимъ: $x = 0, \quad x = R\frac{4m + 3 - \sqrt{8m + 9}}{2(m+1)}$

X. Данъ шаръ радіуса R. Требуется разсѣчь его плоскостью такъ, чтобы поверхность меньшаго изъ двухъ шаровыхъ поясовъ, образующихся при этомъ, была въ данномъ отношеніи m къ боковой поверхности конуса съ тѣмъ же основаніемъ и съ вершиною въ центрѣ шара.

Отв. Находимъ, что высота пояса

$$x = 0, \quad x = \frac{2m^2 R}{m^2 + 4}.$$

XI. Та же задача, но вершина конуса помѣщена теперь въ концѣ діаметра, перпендикулярнаго къ общему основанію, и, именно, въ томъ концѣ, который находится въ бо́льшемъ изъ сегментовъ.

Отв. Находимъ:

$$x = 0, \quad x = R\frac{2m^2 + 1 - \sqrt{4m^2 + 1}}{m^2}.$$

XII. Раздѣлить трапецію съ основаніями a и b линіями, параллельными основаніямъ, на три части, пропорціональныя m, n, p.

Отв. Называя черезъ x и y длины обѣихъ параллелей, находимъ:

$$x^2 = \frac{(n + p)a^2 + mb^2}{m + n + p}, \quad y^2 = \frac{pa^2 + (m + n)b^2}{m + n + p}.$$

XIII. Вписать въ кругъ радіуса R равнобедренный треугольникъ, зная сумму a его основанія съ высотою.

Отв. Называя черезъ x половину основанія и черезъ y высоту, находимъ:

$$x = \frac{2(a-R) \pm \sqrt{4R^2 + 2aR - a^2}}{5}, \quad y = \frac{a + 4R \mp 2\sqrt{4R^2 + 2aR - a^2}}{5}.$$

Изслѣдовать и построить эти рѣшенія; опредѣлить условія возможности, а также, въ какомъ случаѣ будетъ одно или два рѣшенія.

XIV. Данъ четыреугольникъ $ABCD$. Требуется построить другой четыреугольникъ $A'B'C'D'$, стороны котораго были бы соотвѣтственно параллельны сторонамъ перваго и находились бы отъ нихъ на одинаковомъ разстояніи, и при томъ такой, чтобы площадь между периметрами обоихъ многоугольниковъ была равновелика площади квадрата m^2.

Отв. Предположимъ, что четыреугольникъ $A'B'C'D'$ заключаетъ въ себѣ $ABCD$. Обозначая черезъ $2p$ периметръ даннаго четыреугольника, черезъ s сумму cot-овъ половинныхъ угловъ этого четыреугольника и черезъ x разстояніе между параллельными сторонами, составимъ уравненіе

$$sx^2 + 2px - m^2 = 0.$$

Изслѣдовать это рѣшеніе. Испытать, можетъ ли быть истолкованъ отрицательный корень при томъ предположеніи, что четыреугольникъ $A'B'C'D'$ находится внутри четыреугольника $ABCD$.

XV. Даны два круга радіусовъ R и $\frac{R}{m}$: второй касается перваго съ внутренней стороны. Требуется провести третій кругъ, касательный къ обоимъ даннымъ и къ діаметру, соединяющему центры послѣднихъ.

Отв. Обозначая черезъ x радіусъ искомаго круга и черезъ y разстояніе центра перваго круга до точки касанія съ діаметромъ неизвѣстнаго круга, находимъ

$$1)\ x = \frac{4(m-1)}{(m+1)^2}R, \quad y = \frac{3-m}{m+1}R,$$

$$2)\ x = 0, \qquad\qquad y = R.$$

Изслѣдовать и построить рѣшенія.

XVI. Вычислить три стороны x, y и z треугольника, если извѣстно, что объемы тѣлъ вращенія этого треугольника около каждой изъ его сторонъ соотвѣтственно равны объемамъ трехъ шаровъ радіусовъ α, β и γ.

Отв. Находимъ соотношенія $\alpha^3 x = \beta^3 y = \gamma^3 z$, откуда

$$x^3 = \frac{16\alpha^3}{\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3}+\frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{\alpha^3}{\gamma^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3}+\frac{\alpha^3}{\beta^3}-\frac{\alpha^3}{\gamma^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\alpha^3}+\frac{\alpha^3}{\gamma^3}-\frac{\alpha^3}{\beta^3}\right)\left(\frac{\alpha^3}{\beta^3}+\frac{\alpha^3}{\gamma^3}-\frac{\alpha^3}{\alpha^3}\right)};$$

y^3 и z^3 выразятся подобными же формулами.

XVII. Вписать въ шаръ радіуса R цилиндръ, объемъ котораго былъ бы равенъ суммѣ объемовъ сферическихъ сегментовъ съ тѣмъ же самымъ основаніемъ.

Отв. Называя черезъ x радіусъ основанія цилиндра и черезъ y высоту одного изъ сегментовъ, находимъ:

$$1)\quad x^2 = \frac{R^2\sqrt{3}}{2},\quad y = \frac{R(3-\sqrt{3})}{2},$$

$$2)\quad x = 0,\qquad y = 0$$

Построить рѣшеніе

XVIII. Данъ кругъ радіуса R; черезъ точку C, лежащую въ его плоскости, ведемъ касательную къ кругу и затѣмъ вращаемъ заразъ, около діаметра, проходящаго черезъ точку C, какъ касательную, такъ и полуокружность. Требуется опредѣлить точку C такъ, чтобы поверхность конуса, происходящаго отъ вращенія, находилась въ данномъ отношеніи p къ поверхности шаровою пояса съ тѣмъ же основаніемъ, происходящаго также отъ вращенія и заключающагося внутри конуса.

Отв. Называя черезъ x разстояніе точки C до центра и черезъ y разстояніе центра до общаго основанія, находимъ.

$$1)\quad x = (2p-1)R,\quad y = \frac{R}{2p-1},$$

$$2)\quad x = R\qquad\qquad y = R.$$

Изслѣдовать эти рѣшенія.

ГЛАВА ПЯТАЯ

Нѣкоторые вопросы о maximum и minimum

§ 299. Опредѣленія. — Количество x называется *перемѣнною независимою*, если ему можно придавать по произволу какія-угодно значенія. Алгебраическое выраженіе y называется *функціею* перемѣнной x, если оно зависитъ отъ послѣдней такимъ образомъ, что для каждаго значенія x принимаетъ единственное и опредѣленное значеніе.

§ 300. Измѣненія, maximum и minimum функціи. — Если значеніе, придаваемое x, будетъ непрерывно возрастать, то значеніе функціи станетъ *измѣняться*: но оно можетъ быть то возрастающимъ, то убывающимъ. Если функція изъ возрастающей переходитъ въ убывающую, то говорятъ, что она проходитъ черезъ *maximum*; а если, наоборотъ, она изъ убывающей переходитъ въ возрастающую, то говорятъ, что она проходитъ черезъ *minimum*.

Мы не будемъ здѣсь излагать общихъ методовъ, употребляемыхъ для опредѣленія maxima и minima функцій; эти методы будутъ изложены во второй части. Наша цѣль только показать, какъ изслѣдованіе нѣкоторыхъ задачъ второй степени даетъ возможность узнать предѣлы, которыхъ функціи не могутъ перейти. Дѣйствительно, если хотятъ функцію сдѣлать равною нѣкоторому данному количеству, то обыкновенно задача бываетъ возможна только при нѣкоторыхъ условіяхъ. Въ большинствѣ же случаевъ необходимо, чтобы данное количество заключалось въ нѣкоторыхъ предѣлахъ, которые опредѣляются при изслѣдованіи и указываютъ наибольшее и наименьшее значеніе, которое можетъ принять функція. Мы уже встрѣчали нѣкоторыя изъ этихъ задачъ въ предыдущей главѣ (**§§ 291, 293, 295**). Разсмотримъ еще нѣсколько другихъ примѣровъ.

I. Maximum или minimum функціи отъ одной независимой перемѣнной

§ 301. Задача I. — *Раздѣлить данное число 2a на двѣ части произведеніе которыхъ было бы наибольшее (maximum).*

Такъ какъ каждая изъ частей меньше $2a$, то произведеніе меньше квадрата $2a$; слѣдовательно, существуетъ maximum.

Обозначимъ одну изъ частей черезъ x, тогда другая будетъ $(2a-x)$, а произведеніе $x(2a-x)$. Приравниваемъ это произведеніе данному количеству m, т.-е. полагаемъ:

$$x(2a-x)=m,$$

или

$$x^2-2ax+m=0 \qquad (1)$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$x=a\mp\sqrt{a^2-m}. \qquad (2)$$

Для возможности же задачи необходимо, чтобы значенія x были вещественными, т.-е. чтобы m не превосходило a^2. Поэтому, если можно принять a^2, какъ значеніе m, то это будетъ maximum произведенія. Полагая $m=a^2$, изъ формулы (2) получимъ $x=a$, и, слѣдовательно, $2a-x=a$. Эти рѣшенія могутъ быть приняты; итакъ, *чтобы раздѣлить число на двѣ части, произведеніе которыхъ было бы maximum, надо его раздѣлить на двѣ равныя части.*

Minimum не существуетъ, такъ какъ можно придавать m какое-угодно значеніе, меньшее a^2: рѣшеніе будетъ всегда.

Можно доказать эту теорему прямо. Обозначимъ одну изъ частей черезъ $(a-z)$, другую черезъ $(a+z)$; ихъ произведеніе $(a-z)(a+z)$, или (a^2-z^2), всегда меньше a^2, и будетъ тѣмъ больше, чѣмъ меньше z^2. Слѣдовательно, maximum соотвѣтствуетъ minimum'у z^2, т.-е. случаю, когда $z=0$, или, что одно и то же, когда каждая часть равна a.

Легко при этомъ замѣтить, что произведеніе равно нулю, когда первый множитель равенъ нулю; что оно возрастаетъ вмѣстѣ съ этимъ множителемъ до maximum'а и что затѣмъ оно убываетъ и обратится снова въ нуль, когда этотъ множитель сдѣлается равнымъ $2a$.

§ 302. Эта задача даетъ отвѣты на слѣдующіе вопросы:

1. *Какой изъ всѣхъ прямоугольниковъ съ однимъ и тѣмъ же периметромъ $2p$ имѣетъ наибольшую площадь (maximum)?*

Сумма основанія съ высотою постоянна и равна p; слѣдовательно, площадь, измѣряемая ихъ произведеніемъ, достигаетъ maximum'а, когда обѣ стороны равны. Итакъ, прямоугольникъ maximum (съ maximum'омъ площади) есть квадратъ, сторона котораго $\frac{1}{2}p$.

2. *Какой изъ всѣхъ треугольниковъ съ однимъ и тѣмъ же периметромъ $2p$ и съ однимъ и тѣмъ же основаніемъ a будетъ имѣть наибольшую площадь (maximum)?*

Площадь треугольника, стороны котораго a, b, c, равна

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Она достигаетъ maximum'а одновременно съ S^2. А такъ какъ множители p и $(p-a)$ постоянные, то можно ихъ опустить и ограничиться опредѣленіемъ maximum'а произведенія $(p-b)(p-c)$, такъ какъ это послѣднее произведеніе возрастаетъ и убываетъ вмѣстѣ съ первымъ. Сумма же двухъ множителей $(p-b)$ и $(p-c)$ постоянна и равна a; слѣдовательно, произведеніе будетъ maximum, если оба множителя между собою равны, т.-е. если $b=c$, или, что одно и то же, если треугольникъ—равнобедренный.

§ 303. Задача II. — *Разложить число p^2 на два положительныхъ множителя, сумма которыхъ была бы наименьшая (minimum).*

Покажемъ, что сумма будетъ minimum, когда оба числа равны p. Мы доказали (§ 301), что если сумма двухъ чиселъ равна $2p$, то ихъ произведеніе не превышаетъ p^2, т.-е. квадрата полусуммы. Слѣдовательно, если эта сумма меньше $2p$, то произведеніе не мо-

жетъ достигнуть p^2, а потому, чтобы произведеніе равнялось p^2, необходимо, чтобы сумма, по крайней мѣрѣ, была равна $2p$. Отсюда заключаемъ, что $2p$ есть minimum суммы двухъ чиселъ, произведеніе которыхъ равно p^2. Такимъ образомъ мы приходимъ къ теоремѣ: *Чтобы разложить число на два множителя, сумма которыхъ была бы minimum, надо его разложить на два равныхъ множителя.*

Для рѣшенія этой задачи можно также приложить методъ § 301-го. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ одинъ изъ множителей черезъ x, тогда другой будетъ $\frac{p^2}{x}$, и сумма ихъ $\left(x+\frac{p^2}{x}\right)$. Приравниваемъ эту сумму данному количеству m:

$$x+\frac{p^2}{x}=m, \quad \text{или} \quad x^2-mx+p^2=0, \tag{1}$$

откуда

$$x=\frac{m\pm\sqrt{m^2-4p^2}}{2}. \tag{2}$$

Для возможности задачи необходимо, чтобы значенія x были вещественныя, т.-е. чтобы m^2 было, по крайней мѣрѣ, равно $4p^2$. Отсюда вытекаетъ, что если мы можемъ принять $m^2=4p^2$, или $m=2p$ (рѣчь здѣсь идетъ о положительныхъ числахъ), то $2p$ будетъ minimum суммы. Полагая же $m=2p$, изъ формулы (2) найдемъ $x=\frac{m}{2}$, или $x=p$. Это рѣшеніе можетъ быть принято и приведетъ къ вышеизложенной теоремѣ.

Maximum'а нѣтъ, такъ какъ задача возможна, каково бы ни было значеніе, приписываемое m, лишь бы оно было больше $2p$.

Такимъ образомъ сумма двухъ множителей, вначалѣ очень большая, когда x очень мало, убываетъ при возрастаніи x, пока не достигнетъ minimum'а $2p$; затѣмъ при безпредѣльномъ возрастаніи x она также возрастаетъ безпредѣльно.

§ 304. Эта задача даетъ отвѣтъ на слѣдующій вопросъ.

Какой изъ всѣхъ прямоугольниковъ съ одною и тою же площадью s^2 имѣетъ наименьшій периметръ (minimum)? Не трудно убѣдиться въ томъ, что это — квадратъ, сторона котораго s.

§ 305. Задача III.—*Въ треугольникъ, основаніе котораго b и высота h, вписать прямоугольникъ съ наибольшею (maximum) площадью.*

Чтобы вписать въ треугольникъ прямоугольникъ, проводимъ какую-нибудь прямую, параллельную основанію и изъ точекъ ея пересѣченія съ двумя другими сторонами опускаемъ перпендикуляры на основаніе

Понятно, что если параллельная проведена вблизи вершины, то площадь прямоугольника будетъ очень мала; что площадь эта возрастаетъ до нѣкотораго предѣла по мѣрѣ удаленія параллельной прямой отъ вершины; затѣмъ она убываетъ до нуля, когда параллель безпредѣльно приближается къ основанію. Слѣдовательно, площадь имѣетъ maximum.

Обозначимъ черезъ x высоту и черезъ y основаніе прямоугольника (соотвѣтственно параллельныя высотѣ и основанію треугольника) и приравняемъ его площадь данному количеству m:

$$xy = m. \tag{1}$$

Изъ геометріи находимъ безъ труда такое соотношеніе между перемѣнными x и y:

$$\frac{y}{b} = \frac{h - x}{h}, \tag{2}$$

которое даетъ возможность исключить y изъ уравненія (1). Такимъ образомъ

$$\frac{bx(h - x)}{h} = m. \tag{3}$$

Вмѣсто того чтобы рѣшать это уравненіе и изслѣдовать условія, которымъ должно удовлетворять m, чтобы x было вещественнымъ, можно замѣтить, что maximum'а достигаетъ одновременно какъ выраженіе (3), такъ и произведеніе $x\,(h - x)$, отличающееся отъ перваго только постояннымъ множителемъ $\frac{b}{h}$. Но два множителя x и $(h - x)$ имѣютъ постоянную сумму h, поэтому, если этихъ множителей возможно сдѣлать равными, то мы получимъ искомый maximum. А чтобы ихъ сдѣлать равными, надо положить $x = \frac{h}{2}$ и, слѣдовательно, $y = \frac{b}{2}$. Эти значенія могутъ быть приняты. Итакъ, *чтобы вписать въ треугольникъ прямоугольникъ maximum (съ наибольшею площадью), надо провести черезъ средину высоты прямую, параллельную основанію.* Площадь такого прямоугольника равна $\frac{bh}{4}$, т. е. составляетъ половину площади треугольника.

§ 306. Задача IV. — *Около шара даннаго радіуса R описать конусъ съ наименьшимъ объемомъ.*

Чтобы описать какой-нибудь конусъ около шара, разсматриваемъ одинъ изъ большихъ круговъ; проводимъ въ немъ произвольный діаметръ и въ концѣ послѣдняго касательную къ кругу; затѣмъ ведемъ еще другую какую-нибудь касательную и продолжаемъ ее до встрѣчи: съ одной стороны, съ первою касательною, а съ другой—до встрѣчи съ діаметромъ. Треугольникъ, образованный этими тремя прямыми, вмѣстѣ съ полуокружностью вращаемъ вокругъ діаметра: онъ опишетъ конусъ.

Не трудно замѣтить, что когда вторая касательная почти параллельна оси, высота конуса очень велика, а потому и объемъ его чрезвычайно

великъ; по мѣрѣ же наклоненія касательной объемъ уменьшается до нѣкотораго предѣла, послѣ чего начинаетъ безпредѣльно расти, потому что когда подвижная касательная стремится стать параллельною неподвижной касательной, основаніе растетъ безпредѣльно. Слѣдовательно, для объема существуетъ minimum.

Чтобы его опредѣлить, назовемъ высоту конуса черезъ x, а радіусъ его основанія черезъ y, и приравняемъ его объемъ данному количеству m:

$$\frac{1}{3}\pi y^2 x = m. \qquad (1)$$

Изъ геометріи безъ труда получаемъ, между перемѣнными x и y, соотношеніе

$$\frac{y}{R} = \frac{x}{\sqrt{x(x-2R)}}, \text{ или } y^2 = \frac{R^2 x}{x-2R}, \qquad (2)$$

дающее возможность исключить y изъ уравненія (1); такимъ образомъ

$$\frac{1}{3}\pi R^2 \frac{x^2}{x(x-2R)} = m. \qquad (3)$$

Minimum m мы могли бы найти, рѣшивъ это уравненіе и изслѣдовавъ условія возможности задачи. Но проще замѣтить, что множитель $\frac{1}{3}\pi R^2$, какъ постоянный, можно опустить и что minimum выраженія (3) наступаетъ одновременно съ minimum'омъ выраженія $\frac{x^2}{x-2R}$. Minimum же этого послѣдняго соотвѣтствуетъ maximum'у обратнаго выраженія $\frac{x-2R}{x^2}$.

Съ другой же стороны, имѣемъ тождественно

$$\frac{x-2R}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right) = \frac{1}{2R}\,\frac{2R}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$$

и видимъ, что если не обращать вниманія на постоянный множитель $\frac{1}{2R}$, то произведеніе $\frac{2R}{x}\left(1-\frac{2R}{x}\right)$ состоитъ изъ двухъ множителей, сумма которыхъ постоянна и равна 1; слѣдовательно, maximum наступитъ, когда оба множителя будутъ равны $\frac{1}{2}$, т.-е. когда будетъ $x = 4R$. Это значеніе x можетъ быть принято, такъ какъ само x можетъ измѣняться отъ $2R$ до безконечности.

Такимъ образомъ, *описанный вокругъ шара конусъ minimum (съ наименьшимъ объемомъ) имѣетъ высоту, равную удвоенному діаметру шара.* На основаніи формулы (3) *объемъ его равенъ* $\frac{8}{3}\pi R^3$, т.-е. *равенъ удвоенному объему шара. Основаніе его* πy^2, получаемое изъ уравненія (2), равно $2\pi R^2$, т.-е. *оно равно удвоенной площади большого круга.* Наконецъ, *полная его поверхность* $\pi y\sqrt{x^2+y^2}+\pi y^2$ равна $8\pi R^2$, т.-е. *она равна удвоенной поверхности шара.*

§ 307. Задача V. — *Найти, между какими предѣлами можетъ измѣняться трехчленъ $ax^2 + bx + c$.*

Прежде всего приравняемъ этотъ трехчленъ m:

$$ax^2 + bx + c = m. \qquad (1)$$

Рѣшая это уравненіе, находимъ:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + 4am}}{2a}. \qquad (2)$$

Задача возможна только тогда, когда

$$b^2 - 4ac + 4am > 0, \quad \text{или} \quad 4am > 4ac - b^2. \qquad (3)$$

Но чтобы получить изъ этого неравенства предѣлъ для m, придется различить два случая.

1. *Если a положительно*, то мы можемъ раздѣлить обѣ части неравенства на $4a$ (**§ 210**):

$$m > \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (4)$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ *трехчленъ можетъ принять всякое значеніе большее $\frac{4ac - b^2}{4a}$; онъ можетъ также достигнуть этого предѣла, который является его наименьшимъ значеніемъ (minimum).*

2. *Если a отрицательно*, то дѣля обѣ части неравенства (3) на $4a$, измѣняемъ его смыслъ (**§ 210**); тогда получимъ:

$$m < \frac{4ac - b^2}{4a}. \qquad (5)$$

Итакъ, въ этомъ случаѣ *трехчленъ можетъ принять всякое значеніе меньшее $\frac{4ac - b^2}{4a}$; онъ можетъ также достигнуть этого предѣла, который является его наибольшимъ значеніемъ (maximum).*

Въ каждомъ случаѣ, при наименьшемъ или наибольшемъ значеніи m, радикалъ обращается въ нуль, и соотвѣтственное значеніе x равно $-\frac{b}{2a}$.

Теперь легко можно изучить измѣненія трехчлена. Въ самомъ дѣлѣ, мы видѣли (§ 255), что трехчленъ всегда можетъ быть представленъ въ видѣ:

$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right].$$

Но когда x непрерывно измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, членъ $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$, будучи всегда положительнымъ, идетъ уменьшаясь отъ $+\infty$, обращается въ нуль при $x=-\frac{b}{2a}$, затѣмъ возрастаетъ до $+\infty$: его minimum есть нуль. Количество въ скобкахъ, отличаясь отъ разсмотрѣннаго члена только на постоянную величину $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$, также уменьшается отъ $+\infty$ и достигаетъ своего minimum'а $\frac{4ac-b^2}{4a^2}$ при $x=-\frac{b}{2a}$, послѣ чего безпредѣльно возрастаетъ вмѣстѣ съ x. Когда же, для полученія трехчлена, мы умножимъ выраженіе въ скобкахъ на a, то полученное произведеніе будетъ измѣняться въ томъ же смыслѣ, если $a>0$, и въ обратномъ, если $a<0$.

Слѣдовательно, *если a положительно, то трехчленъ отъ $+\infty$ уменьшается до нѣкотораго minimum'а $\frac{4ac-b^2}{4a}$, затѣмъ возрастаетъ до $+\infty$. Если a отрицательно, то онъ отъ $-\infty$ возрастаетъ до нѣкотораго maximum'а $\frac{4ac-b^2}{4a}$, затѣмъ убываетъ до $-\infty$.*

§ 308. Задача VI. — *Найти, между какими предѣлами можетъ измѣняться дробь*

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}.$$

Приравняемъ прежде всего это выраженіе m:

$$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}=m. \qquad (1)$$

Отсюда выводимъ:

$$(a-a'm)x^2+(b-b'm)x+(c-c'm)=0,$$

что даетъ:

$$x = \frac{-(b-b'm) \pm \sqrt{(b-b'm)^2 - 4(a-a'm)(c-c'm)}}{2(a-a'm)}.$$

Располагая члены подъ радикаломъ по степенямъ m, пишемъ:

$$x = \frac{-(b-b'm) \pm \sqrt{(b'^2-4a'c')m^2 - 2(bb'-2ac'-2ca')m + (b^2-4ac)}}{2(a-a'm)}. \quad (2)$$

Чтобы задача была возможна, надо выбрать значенiе для m такъ, чтобы количество подъ радикаломъ не вышло отрицательнымъ, т.-е. чтобы было:

$$(b'^2 - 4a'c')m^2 - 2(bb' - 2ac' - 2ca')m + (b^2 - 4ac) \geq 0. \quad (3)$$

Различимъ три случая.

1. $(b'^2 - 4a'c')$ положительно. Въ этомъ случаѣ, если корни трехчлена, составляющаго первую часть неравенства (3), вещественные и неравные, трехчленъ будетъ положительнымъ (§ 266), т.-е. онъ будетъ того же знака, какъ и первый его членъ, для всѣхъ значенiй m меньшихъ наименьшаго изъ корней и большихъ наибольшаго изъ корней; онъ будетъ отрицательнымъ для всѣхъ значенiй m, взятыхъ между этими корнями. Слѣдовательно, для m можно дать только два ряда значенiй: одинъ, заключающiй всѣ числа отъ $-\infty$ до наименьшаго изъ корней, *который будетъ maximum'омъ*, другой рядъ, заключающiй всѣ числа отъ наибольшаго изъ корней, *который будетъ minimum'омъ*, до $+\infty$.

Если, напротивъ, корни трехчлена вещественные и равные, или мнимые, то трехчленъ для всякаго значенiя m сохраняетъ знакъ своего перваго члена (§§ 267, 268); слѣдовательно, трехчленъ всегда положителенъ, и m можетъ принимать всѣ значенiя безъ исключенiя. Въ этомъ случаѣ нѣтъ ни maximum'a, ни minimum'a.

2. $(b'^2 - 4a'c')$ отрицательно. Въ этомъ случаѣ корни трехчлена никогда не могутъ быть мнимыми, такъ какъ, если бы это было возможно, трехчленъ былъ бы отрицательнымъ для всякаго значенiя m; слѣдовательно, соотвѣтственныя значенiя m и x никогда не были бы заразъ вещественными. Но такое заключенiе не допустимо, такъ какъ, по самому виду уравненiя (1) заключаемъ, что при всякомъ вещественномъ значенiи x количество m также получитъ соотвѣтственное вещественное значенiе. Слѣдовательно, корни — вещественные. Но они не могутъ быть равными,

потому что въ такомъ случаѣ трехчленъ былъ бы отрицательнымъ при всѣхъ значеніяхъ m, кромѣ одного (**§ 267**), при которомъ онъ обратился бы въ нуль; значитъ, соотвѣтственныя значенія m и x были бы заразъ вещественными только въ одномъ случаѣ. Такое заключеніе тоже невозможно, такъ какъ по самому виду уравненія (1) можно замѣтить, что всякій разъ какъ только мы это предположимъ, дробь (1) перестанетъ зависѣть отъ x. Слѣдовательно, корни трехчлена вещественные и неравные. Итакъ, трехчленъ положителенъ, т.-е. знакъ его противоположенъ знаку его перваго члена для всякаго значенія m, взятаго между корнями; онъ отрицателенъ для всякаго другого значенія. Поэтому количеству m можно придавать только значенія, лежащія между наименьшимъ изъ корней, *который и есть minimum*, и наибольшимъ, *который есть maximum*.

3. $(b'^2 - 4a'c')$ равно нулю. Въ этомъ случаѣ количество подъ знакомъ радикала—первой степени относительно m: поэтому, рѣшаемъ неравенство (3), какъ было показано (**§ 210**). Извѣстно, что здѣсь будетъ maximum или minimum, смотря по тому, будетъ ли m отрицательно или положительно.

Итакъ, *чтобы выраженіе* (1) *имѣло maximum и minimum, необходимо и достаточно, чтобы корни трехчлена, образующаго первую часть неравенства* (3), *были вещественные и неравные: эти корни и будутъ maximum'омъ и minimum'омъ, соотвѣтствующія же значенія x опредѣлятся изъ формулы*

$$x = \frac{-(b - b'm)}{2(a - a'm)},$$

если замѣнить въ ней m этими корнями.

309. Измѣненія выраженія $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$. — Если хотимъ опредѣлить измѣненія, которымъ подвергается дробь второй степени, когда x возрастаетъ отъ $-\infty$ до $+\infty$, то прежде всего опредѣляемъ по предыдущему способу ея maximum и minimum, если только она ихъ имѣетъ, а также соотвѣтствующія значенія x. Затѣмъ приравниваемъ нулю послѣдовательно числитель и знаменатель дроби, чтобы опредѣлить значенія x, обращающія ее въ нуль или безконечность. Наконецъ, опредѣляемъ частныя значенія дроби, соотвѣтствующія $x = \pm\infty$ и $x = 0$. Изъ полученныхъ такимъ образомъ значеній перемѣнной составляемъ таблицу, располагая

ихъ въ возрастающемъ порядкѣ; подъ ними же помѣщаемъ соотвѣтствующія значенія функціи. Отсюда легко вывести искомыя измѣненія. Приведемъ примѣръ.

Пусть будетъ дана дробь

$$y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x - 8}.$$

Такъ какъ $(b'^2 - 4a'c')$ положительно, то приходимъ къ первому случаю; приравнивая дробь количеству m, найдемъ слѣдующіе корни трехчлена.

$$m' = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}, \quad m'' = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6},$$

m' есть maximum, m''—minimum. Соотвѣтствующія значенія x:

$$x' = 10 - 6\sqrt{2}, \quad x'' = 10 + 6\sqrt{2}.$$

Значенія x, обращающія дробь въ нуль, представляютъ корни уравненія

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

т.-е. 1 и 2. Значенія, обращающія ее въ безконечность, представляютъ корни уравненія

$$x^2 - 2x - 8 = 0,$$

т.-е. -2 и 4. Наконецъ, при $x = \pm\infty$ дробь принимаетъ значеніе 1, при $x = 0$ она равна $-\frac{1}{4}$.

Такимъ образомъ, предложенная дробь можетъ быть написана въ видѣ:

$$y = \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-4)}.$$

Составляемъ теперь таблицу:

$$x = -\infty, \quad -2, \quad 0, \quad 1, \quad 10 - 6\sqrt{2}, \quad 2, \quad 4, \quad 10 + 6\sqrt{2}, \quad +\infty;$$

$$y = +1 \quad \pm\infty, \quad -\frac{1}{4}, \quad 0, \quad \frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}, \quad 0, \quad \pm\infty, \quad \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6}, \quad +1$$

При возрастаніи x отъ $-\infty$ до -2, y, оставаясь положительнымъ, такъ какъ всѣ его четыре множителя отрицательны, возрастаетъ отъ $+1$ до $+\infty$; затѣмъ y мѣняетъ знакъ, такъ какъ множитель $(x+2)$ является уже положительнымъ, и сразу переходитъ отъ $+\infty$ къ $-\infty$; далѣе, при возрастаніи x отъ -2 до 0, отъ 0 до 1 и отъ 1 до $10 - 6\sqrt{2}$, все выраженіе возрастаетъ отъ $-\infty$ до $-\frac{1}{4}$, отъ $-\frac{1}{4}$ до 0 и отъ 0 до maximum'а $\frac{3 - 2\sqrt{2}}{6}$. При дальнѣйшемъ возрастаніи x до 2 и отъ 2

до 4, y убываетъ отъ maximum'а до 0 и отъ 0 до $-\infty$; затѣмъ сразу переходитъ отъ $-\infty$ къ $+\infty$, потому что тогда всѣ четыре множителя становятся положительными. Далѣе, при возрастанiи x отъ 4 до $10+6\sqrt{2}$, y убываетъ до minimum'а $\frac{3+2\sqrt{2}}{6}$; и, наконецъ, при возрастанiи x отъ $10+6\sqrt{2}$ до $+\infty$, y возрастаетъ отъ minimum'а до $+1$.

§ 310. Задача VII. — ***Двѣ перемѣнныя x и y связаны между собой уравненiемъ второй степени***

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0; \qquad (1)$$

найти предѣльныя значенiя, какiя можетъ принять одна изъ нихъ, напр., x.

Рѣшивъ уравненiе относительно y, получимъ:

$$y = \frac{-bx - d \pm \sqrt{(b^2-4ac)x^2+2(bd-2ae)x+d^2-4af}}{2a}, \qquad (2)$$

или, полагая

$$b^2 - 4ac = m,\ bd - 2ae = n,\ d^2 - 4af = p,$$

напишемъ:

$$y = \frac{-bx - d \pm \sqrt{mx^2+2nx+p}}{2a}. \qquad (3)$$

Чтобы y было вещественнымъ, необходимо x придать такое значенiе, при которомъ имѣло бы мѣсто неравенство:

$$mx^2 + 2nx + p > 0; \qquad (4)$$

и мы видѣли (§ 270), какъ въ различныхъ случаяхъ можно вывести изъ неравенства (4) предѣлы, между которыми должно или не должно заключаться значенiе x.

§ 311. Общее правило. — Рѣшенные нами примѣры достаточны для того, чтобы показать, какъ поступаютъ въ элементарной алгебрѣ при разысканiи maxima и minima нѣкоторыхъ функцiй второй степени, зависящихъ только отъ одной независимой перемѣнной. *Сначала изучаютъ, насколько возможно, ходъ измѣненiя функцiи, чтобы выяснить, существуетъ ли maximum или minimum. Выбираютъ затѣмъ перемѣнныя по условiю вопроса и выражаютъ функцiю посредствомъ этихъ перемѣнныхъ. Далѣе, приравниваютъ данное выраженiе m и составляютъ между различными перемѣнными*

уравненія по даннымъ задачи. Эти уравненія даютъ возможность опредѣлить независимую перемѣнную, какъ функцію отъ m; изслѣдованіе же условій возможности задачи дастъ предѣлы, по которымъ найдутся maximum и minimum заданнаго выраженія, если только они существуютъ.

§ 312. Замѣчаніе. — Надо признаться, что этотъ методъ — весьма частный, такъ какъ прилагается только къ функціямъ второй степени. Притомъ онъ является и искусственнымъ. Дѣйствительно, вмѣсто того чтобы вести къ нахожденію maximum'а и minimum'а функціи путемъ разсужденій, вытекающихъ изъ общаго опредѣленія (**§ 300**), этотъ методъ приводитъ къ результатамъ нѣкоторымъ образомъ случайно, потому что послѣдніе выводятся изъ условій возможности задачи, отличной отъ предложенной.

Поэтому, не безъинтересно будетъ показать, что полученные съ помощью этого метода результаты удовлетворяютъ общему опредѣленію. Для этой цѣли возвратимся къ задачѣ VI (**§ 308**) и разсмотримъ, чтобы на чемъ-нибудь остановиться, тотъ случай, когда $(b'^2 - 4a'c')$ положительно. Извѣстно, что если корни трехчлена второй степени относительно m — вещественные и неравные, то дробь не можетъ принять никакого значенія, содержащагося между корнями: наименьшій изъ нихъ m' есть maximum, а наибольшій m'' — minimum дроби. При этомъ обозначаемъ черезъ x' и x'' соотвѣтственныя значенія x.

Maximum M функціи характеризуется тѣмъ (**§ 300**), что если назовемъ черезъ a значеніе x, соотвѣтствующее этому maximum'у, то, подставляя $(a-h)$ и $(a+h)$ на мѣсто x, получимъ значенія функціи, меньшія M, если h достаточно мало. Кромѣ того, *вслѣдствіе непрерывности* эти значенія отличаются отъ M также на количества сколь-угодно малыя. Но x' и m' удовлетворяютъ этимъ условіямъ. Въ самомъ дѣлѣ, когда x непрерывно измѣняется, дробь m также измѣняется непрерывно; притомъ, когда $x = x'$, m принимаетъ значеніе m'. Наконецъ, при $x = x' - h$ и $x = x' + h$, гдѣ h достаточно мало, значенія m могутъ быть только меньше m', такъ какъ они должны отличаться отъ него на очень малую величину, а будучи больше m', они, по крайней мѣрѣ, равнялись бы m'', потому что m не можетъ принимать никакихъ значеній между m' и m''.

Съ помощью такихъ же разсужденій можно было бы показать, что x' и m' удовлетворяютъ условіямъ, которымъ подчиняется, по опредѣленію, minimum функціи; и что въ другихъ случаяхъ, когда дробь второй степени можетъ имѣть maximum и minimum, элементарный методъ даетъ результаты, удовлетворяющіе также общему опредѣленію.

II. Maximum или minimum нѣкоторыхъ функцій степени выше второй

§ 313. Задача VIII. — *Раздѣлить данное число a на n частей, произведеніе которыхъ было бы наибольшимъ.*

Каждая часть меньше a, поэтому произведеніе ихъ не можетъ достигнуть a^n; слѣдовательно, оно можетъ имѣть maximum. Разобьемъ данное число на n какихъ-нибудь положительныхъ частей: $x, y, z, \ldots, u, t$ такимъ образомъ, чтобы

$$x+y+z+\ldots+u+t=a \qquad (1)$$

Предполагая, что въ ихъ произведеніи

$$xyz\ldots ut \qquad (2)$$

два множителя x и y не равны между собой, и замѣняя каждый изъ нихъ ихъ полусуммой $\frac{x+y}{2}$, составимъ новое произведеніе

$$\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot z\ldots ut.$$

Такъ какъ сумма первыхъ двухъ множителей не измѣнилась, то и это произведеніе удовлетворяетъ условію (1); съ другой же стороны, эти множители стали равными, а потому (**§ 301**)

$$xy<\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2},$$

и, слѣдовательно,

$$xyz\ldots ut<\frac{x+y}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot z\ldots ut. \qquad (3)$$

Итакъ, произведеніе (2) не есть maximum. Такимъ образомъ, произведеніе положительныхъ перемѣнныхъ множителей, сумма кото-

рыхъ постоянна, не можетъ быть maximum'омъ, если эти множители не равны между собой. А такъ какъ maximum существуетъ, то отсюда слѣдуетъ, что *произведеніе будетъ наибольшимъ (maximum), когда всѣ множители равны* $\frac{a}{n}$.

§ 314. Замѣчанія.—Въ предыдущемъ разсужденіи мы предполагали, что всѣ множители положительны. Если бы этого не было, то произведеніе не имѣло бы maximum'а, такъ какъ сумма множителей оставалась бы постоянною, въ то время какъ сами множители по абсолютному значенію могли бы увеличиваться безпредѣльно; и если бы число отрицательныхъ множителей было четное, то произведеніе было бы положительно и также могло бы стать сколь-угодно большимъ.

Наше разсужденіе, кромѣ того, предполагаетъ, что можно сдѣлать равными всѣ множители. Это условіе всегда надо провѣрить, прежде чѣмъ приложить теорему.

§ 315. Задача IX. — *Раздѣлить число a на такія двѣ части, x и y, чтобы произведеніе* $x^p y^q$ *было наибольшимъ; p и q—данныя цѣлыя числа.*

Условія maximum'а не измѣнятся, если вмѣсто произведенія $x^p y^q$ разсматривать дробь $\frac{x^p y^q}{p^p q^q}$, которая есть не что иное, какъ данное произведеніе, раздѣленное на постоянное число $p^p q^q$. А эта дробь можетъ быть написана такъ:

$$P=\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdot\frac{x}{p}\cdots\frac{x}{p}\cdot\frac{y}{q}\cdot\frac{y}{q}\cdots\frac{y}{q};$$

слѣдовательно, она представляетъ произведеніе $(p+q)$ множителей, сумма которыхъ $(x+y)$ постоянна и равна a. Если бы эти множители были независимы другъ отъ друга и были бы подчинены только одному условію, что ихъ сумма постоянна, напр., если бы разсматривали произведеніе $P_1=x_1 x_2 \ldots x_p y_1 y_2 \ldots y_q$, то получили бы (§ 313) maximum для P_1, полагая

$$x_1=x_2=\ldots=x_p=y_1=y_2=\ldots=y_q=\frac{a}{p+q},$$

и этотъ maximum былъ бы равенъ $\left(\frac{a}{p+q}\right)^{p+q}$. Но такъ какъ нѣкоторые множители P должны оставаться равными, то разсужденіе § 313-го уже не приложимо; однако очевидно, что всѣ зна-

ченія P взяты среди значеній P_1; поэтому maximum для P не можетъ превзойти maximum для P_1. И онъ будетъ ему равенъ, если положить $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\frac{a}{p+q}$. Слѣдовательно, произведеніе $x^p y^q$ будетъ наибольшимъ (maximum), когда обѣ части, x и y, числа a пропорціональны показателямъ p и q.

Точно также докажемъ, что для раздѣленія a на n такихъ частей, $x, y, z, \ldots, u, t$, чтобы произведеніе $x^\alpha y^\beta z^\gamma \ldots u^\varphi t^\psi$ было maximum, надо удовлетворить условіямъ:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\ldots=\frac{u}{\varphi}=\frac{t}{\psi}.$$

§ 316. Задача X.—*Разложить число p на n положительныхъ множителей, сумма которыхъ была бы наименьшая.*

Сумма будетъ наименьшая (minimum), когда всѣ числа равны $\sqrt[n]{p}$. Въ самомъ дѣлѣ, было доказано (**§ 313**), что если сумма n чиселъ равна $n\sqrt[n]{p}$, то произведеніе ихъ не можетъ превзойти $(\sqrt[n]{p})^n$, или, что одно и то же, числа p, т.-е. n-ой степени n-ой части суммы. Итакъ, если эта сумма меньше $n\sqrt[n]{p}$, то произведеніе не можетъ достигнуть p. Слѣдовательно, чтобы произведеніе могло равняться p, необходимо, чтобы сумма, по крайней мѣрѣ, равнялась $n\sqrt[n]{p}$. Отсюда вытекаетъ, что $n\sqrt[n]{p}$ есть minimum суммы; въ этомъ случаѣ всѣ части равны $\sqrt[n]{p}$.

§ 317. Задача XI.—*Дано произведеніе $x^p y^q=P$. Найти minimum суммы $x+y$.*

Этотъ minimum будетъ соотвѣтствовать тому случаю, когда $\frac{x}{p}=\frac{y}{q}$. Въ самомъ дѣлѣ, обозначимъ черезъ α и β два числа, удовлетворяющихъ условіямъ:

$$\alpha^p \beta^q = P, \quad \frac{\alpha}{p}=\frac{\beta}{q}.$$

Было доказано (**§ 315**), что изъ всѣхъ чиселъ x и y, сумма которыхъ $(\alpha+\beta)$, числа α и β таковы, что при этихъ значеніяхъ x и y произведеніе $x^p y^q$ будетъ наибольшимъ. А потому, если сумма двухъ чиселъ меньше $(\alpha+\beta)$, то произведеніе $x^p y^q$ будетъ, *à fortiori*, меньше $\alpha^p \beta^q$, т.-е. меньше P. Слѣдовательно, чтобы произведеніе $x^p y^q$ было равно P, необходимо, чтобы $(x+y)$, по крайней мѣрѣ, равня-

лось $(\alpha + \beta)$, которое, слѣдовательно, и будетъ наименьшимъ значеніемъ (minimum) для $(x + y)$.

§ 318. Замѣчаніе.—Три задачи **(§ 303)**, **(§ 316)**, **(§ 317)** являются, въ нѣкоторомъ родѣ, взаимными для тѣхъ, которыя были рѣшены въ **§§ 301, 313, 315**. Эта взаимность между извѣстнаго рода задачами на maximum и minimum можетъ быть формулирована въ общемъ видѣ слѣдующимъ образомъ:

Если количество X, когда дано количество Y, есть maximum при нѣкоторыхъ обстоятельствахъ, то, въ свою очередь, когда дано X, количество Y будетъ minimum при тѣхъ же обстоятельствахъ, лишь бы только maximum X уменьшался въ то время, когда данное значеніе Y также уменьшается.

Въ самомъ дѣлѣ, пусть B данное значеніе Y и A наибольшее значеніе X, какое можетъ существовать при B. Если придадимъ Y значеніе b, меньшее B, то, по предположенію, соотвѣтствующій maximum для X будетъ меньше A. Итакъ, чтобы значеніе X могло равняться A, необходимо, чтобы значеніе Y было, по крайней мѣрѣ, равно B, а потому B есть наименьшее значеніе Y, какое можетъ соотвѣтствовать значенію $X = A$, т.-е. B есть наименьшее значеніе Y, соотвѣтствующее значенію A количества X.

Примѣръ. — Въ геометріи доказывается, что окружность круга есть кривая, которая при данной длинѣ заключаетъ наибольшую площадь. Изъ этого слѣдуетъ, что она изъ всѣхъ кривыхъ съ данною площадью имѣетъ наименьшій периметръ.

§ 319. Задача XII.—*Вписать въ шаръ даннаго радіуса R цилиндръ съ наибольшимъ объемомъ.*

Когда радусъ основанія цилиндра очень малъ, объемъ также очень малъ. Его значеніе увеличивается съ возрастаніемъ радіуса, но это увеличеніе имѣетъ предѣлъ, такъ какъ, когда радіусъ становится почти равнымъ R, высота дѣлается очень малой, а, слѣдовательно, объемъ обращается почти въ нуль.

Обозначимъ радіусъ основанія черезъ x, а высоту одного изъ вписанныхъ цилиндровъ черезъ $2y$. Объемъ его V выразится формулою $2\pi x^2 y$. Кромѣ того, изъ геометріи мы имѣемъ такое соотношеніе между x и y:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{1}$$

Исключая x изъ этого уравненія и выраженія объема, получимъ:

$$V = 2\pi y(R^2 - y^2). \tag{2}$$

Maximum этого выраженія соотвѣтствуетъ тому же значенію y, какъ и maximum $y(R^2-y^2)$. Но это произведеніе не второй степени, и, слѣдовательно, для нахожденія его maximum'а нельзя приложить обычнаго метода (§ 311). Нельзя также для этой цѣли разлагать выраженіе на множителей и писать его или въ видѣ $y(R+y)(R-y)$, или, по удвоеніи, $y(R+y)(2R-2y)$, потому что, хотя сумма трехъ множителей и была бы въ этомъ случаѣ постоянна и равна $3R$, но самихъ множителей нельзя сдѣлать равными между собой. Если же возвысимъ произведеніе въ квадратъ, т.-е. напишемъ $y^2(R^2-y^2)^2$, то сейчасъ же замѣтимъ, что y^2 можно разсматривать, какъ перемѣнную, и что сумма двухъ множителей y^2 и (R^2-y^2) постоянна и равна R^2. Слѣдовательно, на основаніи теоремы § 315-го заключаемъ, что если можно подобрать для y значеніе, удовлетворяющее пропорціи

$$\frac{y^2}{1}=\frac{R^2-y^2}{2}, \tag{3}$$

то это значеніе будетъ соотвѣтствовать искомому maximum'у. Изъ уравненія (3) находимъ.

$$y^2=\frac{R^2}{3},$$

и, слѣдовательно,

$$x^2=\frac{2R^2}{3}.$$

Эти значенія x и y могутъ быть приняты, такъ какъ они — вещественныя и меньше радіуса R. Итакъ, наибольшій объемъ (maximum) цилиндра равенъ

$$V=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}.$$

§ 320.—Иногда бываетъ болѣе удобно свести разысканіе minimum'а какой-нибудь функціи къ разысканію maximum'а обратной функціи.

Задача XIII.—*Описать вокругъ шара радіуса R конусъ, основаніе котораго находится на діаметральной плоскости и объемъ котораго наименьшій (minimum).*

Обозначимъ черезъ x и черезъ y радіусъ основанія и высоту одного изъ описанныхъ конусовъ. Объемъ его V равенъ $\frac{1}{3}\pi x^2 y$. Изъ геометріи, кромѣ того, легко получить слѣдующее соотношеніе:

$$x^2=\frac{R^2y^2}{y^2-R^2}; \tag{1}$$

слѣдовательно, выраженіе для объема будетъ:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2\frac{y^4}{y^2-R^2}. \tag{2}$$

Такъ какъ множитель $\frac{1}{3}\pi R^2$ — постоянный, то достаточно опредѣлить minimum дроби $\frac{y^3}{y^2-R^2}$. Этотъ minimum соотвѣтствуетъ, очевидно, maximum'у обратной дроби $\frac{y^2-R^2}{y^3}$, или maximum'у ея квадрата $\frac{(y^2-R^2)^2}{y^6}$. На основанiи же тождества

$$\frac{(y^2-R^2)^2}{y^6}=\frac{1}{y^2}\left(\frac{y^2-R^2}{y^2}\right)^2=\frac{1}{y^2}\left(1-\frac{R^2}{y^2}\right)^2=\frac{1}{R^2}\frac{R^2}{y^2}\left(1-\frac{R^2}{y^2}\right)^2$$

заключаемъ, не обращая, конечно, вниманiя на постоянный множитель $\frac{1}{R^2}$, что сумма двухъ другихъ множителей, $\frac{R^2}{y^2}$ и $\left(1-\frac{R^2}{y^2}\right)$, постоянна; слѣдовательно, если за y можетъ быть выбрано значенiе, получаемое изъ соотношенiя (§ 315)

$$\frac{R^2}{y^2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{R^2}{y^2}\right), \tag{3}$$

то это значенiе будетъ соотвѣтствовать maximum'у $\frac{y^2-R^2}{y^3}$, или, что одно и то же, minimum'у $\frac{y^3}{y^2-R^2}$. Изъ уравненiя же (3) находимъ: $y^2=3R$, слѣдовательно, уравненiе (1) дастъ: $x^2=\frac{3R^2}{2}$. Эти значенiя x и y, будучи больше R, могутъ быть приняты; отсюда заключаемъ, что описанный конусъ съ наименьшимъ (minimum) объемомъ будетъ имѣть

$$V=\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}.$$

§ 321. Распространенiе метода, даннаго въ теоремѣ § 313-го.— Чтобы сдѣлать произведенiе перемѣнныхъ множителей наибольшимъ (maximum'омъ), приводятъ ихъ сумму къ постоянной величинѣ и затѣмъ уравниваютъ ихъ между собою. Въ случаѣ необходимости можно сначала умножить этихъ множителей на нѣкоторыя постоянныя числа, выбранныя надлежащимъ образомъ, такъ какъ такое умноженiе не измѣняетъ условiй maximum'а. Но не всегда легко найти *à priori* тѣ числа, которыми слѣдуетъ пользоваться. Въ такомъ случаѣ ихъ обозначаютъ буквами и разсматривая, какъ неизвѣстныя, стараются опредѣлить ихъ такъ, чтобы были удовлетворены оба условiя maximum'а (§ 313).

§ 322. Задача XIV. — *Въ разнобочной трапецiи даны: меньшее основанiе a и сумма c двухъ непараллельныхъ сторонъ. Найти maximum площади трапецiи.*

Обозначимъ черезъ x полуразность двухъ основаній трапеціи; большее основаніе будетъ $(a+2x)$: высота $\sqrt{c^2-x^2}$; слѣдовательно, площадь трапеціи выразится формулою

$$S=(a+x)\sqrt{c^2-x^2},$$

и maximum этой площади наступитъ при томъ же значеніи x, какъ и maximum квадрата,

$$S^2=(a+x)^2(c^2-x^2),$$

или

$$S^2=(a+x)(a+x)(c+x)(c-x). \qquad (1)$$

Не трудно было бы сдѣлать постоянною сумму четырехъ множителей: для этого достаточно было бы послѣдній множитель умножить на 3; но нельзя было бы затѣмъ сдѣлать эти множители равными. Поэтому умножаемъ всѣ *различные* между собою множители, исключая одного, на неопредѣленныя числа α, β:

$$\alpha\beta S^2=(a+x)(a+x)(\alpha c+\alpha x)(\beta c-\beta x).$$

Сдѣлаемъ сначала сумму множителей постоянною, приравнявъ нулю коэффиціентъ при x:

$$2+\alpha-\beta=0. \qquad (2)$$

Затѣмъ мы можемъ уравнять различные множители, полагая

$$a+x=\alpha c+\alpha x, \qquad (3)$$

$$a+x=\beta c-\beta x. \qquad (4)$$

Эти три уравненія, (2), (3), (4), достаточны для опредѣленія коэффиціентовъ α и β и искомаго значенія x. Но нѣтъ необходимости отыскивать α и β: достаточно ихъ исключить при помощи трехъ уравненій, чтобы получить x. Такимъ образомъ, на основаніи уравненій (3) и (4), имѣемъ:

$$\alpha=\frac{a+x}{c+x}, \quad \beta=\frac{a+x}{c-x},$$

а подставляя эти значенія въ уравненіе (2), найдемъ:

$$2+\frac{a+x}{c+x}-\frac{a+x}{c-x}=0,$$

или, по упрощеніи,

$$2x^2+ax-c^2=0. \qquad (5)$$

Такъ какъ только положительный корень можетъ удовлетворить задачѣ, то значеніе x, соотвѣтствующее maximum'у, выразится слѣдующимъ образомъ:

$$x=\frac{-a+\sqrt{a^2+8c^2}}{4}. \qquad (6)$$

Можно при этомъ замѣтить, что уравненіе (5), представленное подъ видомъ:

$$x(2x+a)=c^2,$$

показываетъ, что сторона c есть средняя пропорціональная между x и большимъ основаніемъ, и что, поэтому, большее основаніе есть гипотенуза прямоугольнаго треугольника, катетами котораго будутъ c и діагональ трапеціи.

Если $c=a$, то $x=\frac{a}{2}$, и большее основаніе равно $2a$. Итакъ, равнобочная трапеція съ наибольшею площадью представляетъ половину правильнаго шестиугольника.

§ 323. Необходимо замѣтить, что если выраженіе заключаетъ n различныхъ множителей, то вводятъ $(n-1)$ произвольныхъ величинъ, что вмѣстѣ съ x составитъ n неизвѣстныхъ. Ставя условіемъ, чтобы сумма множителей была постоянною, получаемъ первое уравненіе; а уравнивая n множителей, получимъ $(n-1)$ остальныхъ уравненій. Такимъ образомъ, нашъ методъ даетъ столько уравненій, сколько неизвѣстныхъ: значитъ, онъ — общій.

III. Maximum или minimum нѣкоторыхъ функцій отъ многихъ перемѣнныхъ

§ 324. Задача XV.—*Найти, между какими предѣлами можетъ измѣняться многочленъ*

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F, \qquad (1)$$

когда перемѣнныя x и y принимаютъ всевозможныя значенія.

Приравниваемъ этотъ многочленъ данному количеству m:

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=m.$$

Разсматривая y, какъ неизвѣстную, получимъ изъ этого уравненія:

$$y = \frac{-(Bx+D) \pm \sqrt{(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+(D^2-4AF)+4Am}}{2A}. \quad (2)$$

Но чтобы величина, обозначенная черезъ m, была совмѣстна съ вещественными значеніями x и y, необходимо, чтобы при этомъ значеніи m и при надлежащемъ выборѣ x имѣло мѣсто слѣдующее неравенство:

$$(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF+4Am > 0. \quad (3)$$

Различимъ три случая:

1. (B^2-4AC) положительно. Въ этомъ случаѣ, каково бы ни было m, неравенство (3) всегда возможно, такъ какъ всегда можно выбрать для x безчисленное множество такихъ значеній, при которыхъ трехчленъ, представляющій первую часть неравенства, приметъ знакъ своего перваго члена (**§ 269**).

2. (B^2-4AC) отрицательно. Въ этомъ случаѣ неравенство (3) возможно, если корни трехчлена вещественны, такъ какъ, давая x значенія, заключенныя между этими корнями, сдѣлаемъ знакъ трехчлена противоположнымъ знаку его перваго члена. Неравенство (3) возможно только при этомъ условіи: дѣйствительно, если бы корни были мнимые, трехчленъ сохранялъ бы при всякомъ x знакъ своего перваго члена; онъ былъ бы постоянно отрицательнымъ (**§ 268**). А потому въ этомъ случаѣ выбрать m слѣдуетъ такъ, чтобы корни трехчлена были вещественные. Условіе же это выражается неравенствомъ (**§ 246**)

$$(BD-2AE)^2-(B^2-4AC)(D^2-4AF+4Am) > 0. \quad (4)$$

Такъ какъ это неравенство — первой степени относительно m, то изъ него мы найдемъ предѣлъ для этого количества. Отсюда заключаемъ, что если этотъ предѣлъ можетъ быть принятъ, то maximum или minimum будетъ существовать.

Но это предѣльное значеніе m обращаетъ въ нуль первую часть неравенства (4); слѣдовательно, дѣлаетъ равными корни трехчлена (3), и послѣдній, поэтому, можетъ быть написанъ такъ: $(B^2-4AC)(x-x')^2$, гдѣ x' есть значеніе двукратнаго корня. Итакъ, значеніе (2) для y при этомъ предположеніи принимаетъ видъ:

$$y = \frac{-(Bx+D) \pm (x-x')\sqrt{B^2-4AC}}{2A};$$

а такъ какъ (B^2-4AC) отрицательно, то y будетъ вещественнымъ только при $x=x'$; значитъ, надо x придать это значеніе,— соотвѣтственное же значеніе y будетъ

$$y'=-\frac{Bx'+D}{2A}.$$

Эти значенія x и y могутъ быть приняты: они дадутъ, слѣдовательно, maximum или minimum m.

3. $(B^2-4AC)=0$. Въ этомъ случаѣ неравенство (3)—первой степени относительно x, и какова бы ни было значеніе m, всегда возможно удовлетворить неравенству, выбирая x надлежащимъ образомъ. Слѣдовательно, нѣтъ ни maximum, ни minimum.

Однако, если $(BD-2AE)$ равно нулю одновременно съ (B^2-4AC), то неравенство (3) сведется къ такому:

$$D^2-4AF+4Am>0,$$

откуда для m мы нашли бы предѣлъ, т.-е.

$$m>\frac{4AF-D^2}{4A}, \quad \text{или} \quad m<\frac{4AF-D^2}{4A},$$

смотря по тому, будетъ ли A положительнымъ или отрицательнымъ. Въ первомъ случаѣ многочленъ имѣлъ бы minimum, во второмъ— maximum.

Эта теорія легко можетъ быть распространена на случай болѣе двухъ независимыхъ перемѣнныхъ.

Приложимъ ее къ слѣдующему примѣру.

§ 325. Задача XVI.—*Найти minimum выраженія $x^2+y^2+z^2$, зная, что x, y, z связаны соотношеніемъ*

$$ax+by+cz=d. \tag{1}$$

Положимъ

$$x^2+y^2+z^2=m.$$

Мы можемъ исключить одну изъ перемѣнныхъ, напр., z; дѣйствительно, изъ уравненія (1) найдемъ:

$$z=\frac{d-ax-by}{c}$$

и, слѣдовательно,

$$x^2+y^2+\left(\frac{d-ax-by}{c}\right)^2=m,$$

или

$$(a^2+c^2)x^2+2abxy+(b^2+c^2)y^2-2adx-2bdy+d^2-c^2m=0. \tag{2}$$

Рѣшая уравненіе (2) относительно y, получимъ, послѣ нѣкоторыхъ упрощеній:

$$y = \frac{b(d-ax) \pm c\sqrt{-(a^2+b^2+c^2)x^2+2adx-d^2+(b^2+c^2)m}}{b^2+c^2} \qquad (3)$$

Коэффиціентъ при x^2 въ трехчленѣ, стоящемъ подъ знакомъ радикала, отрицателенъ; поэтому, значеніе m должно быть выбрано такъ, чтобы корни этого трехчлена были вещественные, а для этого необходимо, чтобы

$$a^2d^2+(a^2+b^2+c^2)[-d^2+(b^2+c^2)m]>0,$$

или

$$-(b^2+c^2)d^2+(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2)m>0;$$

послѣ перенесенія членовъ и по раздѣленіи обѣихъ частей на $(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)$ можемъ написать:

$$m>\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Итакъ, если можно придать m значеніе

$$m=\frac{d^2}{a^2+b^2+c^2},$$

то это будетъ искомый minimum. Но при этомъ значеніи m трехчленъ, находящійся подъ радикаломъ, обращается въ слѣдующее выраженіе

$$-(a^2+b^2+c^2)\left(x-\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)^2,$$

и значеніе (3) для y перейдетъ въ такое:

$$y=\frac{b(d-ax)\pm\left(x-\frac{ad}{a^2+b^2+c^2}\right)\sqrt{-(a^2+b^2+c^2)}}{b^2+c^2}.$$

Оно будетъ вещественнымъ только въ томъ случаѣ, если положить

$$x=\frac{ad}{a^2+b^2+c^2},$$

и тогда y выразится формулою:

$$y=\frac{bd}{a^2+b^2+c^2};$$

отсюда

$$z=\frac{cd}{a^2+b^2-c^2}.$$

Эти значенія могутъ быть приняты и даютъ minimum выраженія $(x^2+y^2+z^2)$.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Найти наименьшій изъ всѣхъ квадратовъ, какіе можно вписать въ данный квадратъ такимъ образомъ, чтобы на каждой сторонѣ даннаго находилось по одной вершинѣ вписываемаго.

Отв. Вершины такого квадрата будутъ лежать на серединахъ сторонъ даннаго.

II. Вписать въ кругъ радіуса R треугольникъ съ наибольшею площадью.

Отв. Не трудно замѣтить, что мы должны разсматривать только равнобедренные треугольники, и, прилагая теорему **§ 315**-го, найдемъ, что искомый треугольникъ будетъ равносторонній.

III. Пусть равнобедренный треугольникъ, вписанный въ кругъ радіуса R, вращается вокругъ своего основанія. Какой изъ такихъ треугольниковъ опишетъ наибольшій объемъ?

Отв. Прилагая теорему **§ 315**-го, найдемъ, что высота вращающагося треугольника должна быть равна $\frac{5R}{3}$. Искомый объемъ (maximum) будетъ $\frac{50\pi R^3\sqrt{5}}{81}$.

IV. Какой изъ всѣхъ прямыхъ конусовъ съ объемомъ $\frac{1}{3}\pi a^3$ будетъ имѣть наименьшую (minimum) боковую поверхность?

Отв. Прилагая теорему **§ 317**-го, находимъ, что высота его $y = a\sqrt[3]{2}$, а радіусъ основанія $x = \sqrt{\frac{a^2}{\sqrt[3]{2}}}$.

V. Какой изъ всѣхъ прямыхъ конусовъ съ боковою поверхностью πa^2 будетъ имѣть наибольшій (maximum) объемъ?

Отв. Прилагая теорему **§ 315**-го, находимъ, что радіусъ основанія $x = \frac{a}{\sqrt[4]{3}}$, а высота $y = a\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$.

VI. Какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ съ одною и тою же поверхностью будетъ имѣть наибольшій объемъ; и какой изъ такихъ же параллелепипедовъ съ однимъ и тѣмъ же объемомъ будетъ имѣть наименьшую (minimum) поверхность?

Отв. Кубъ (теоремы §§ 313-го и 316-го).

VII. Какой изъ всѣхъ сферическихъ поясовъ (зонъ) съ одною и тою же поверхностью πa^2 будетъ имѣть наибольшій объемъ; и какой изъ поясовъ съ однимъ и тѣмъ же объемомъ πa^3 будетъ имѣть наименьшую поверхность?

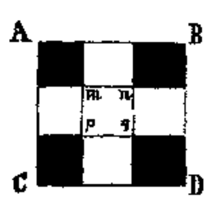
Отв. Прилагая теорему **§ 315**-го, находимъ, что радіусъ основанія и высота пояса съ наибольшимъ объемомъ равны въ отдѣльности $\frac{a}{\sqrt{2}}$ Слѣдовательно, сегментъ maximum есть полусфера.

Пользуясь теоремою **§ 317**-го, найдемъ, что и сегментъ minimum (съ наименьшею поверхностью) есть полусфера.

VIII Какой изъ всѣхъ цилиндровъ съ однимъ и тѣмъ же объемомъ V будетъ вписанъ въ наименьшую сферу?

Отв. Основываясь на формулахъ **§ 319**-го и на замѣчаніи **§ 318**-го, находимъ, что радіусъ наименьшей сферы есть $\sqrt[3]{\frac{3V\sqrt{3}}{4\pi}}$. Отсюда заключаемъ, что радіусъ основанія цилиндра $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi\sqrt{2}}}$, а высота $h = \sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$.

IX. Данъ листокъ картона $ABCD$ квадратной формы, каждая сторона котораго равна a. По четыремъ его угламъ вырѣзываютъ равные квадраты (черные на прилагаемомъ рисункѣ) Опредѣлить сторону этихъ квадратовъ подъ условіемъ, чтобы ящикъ, у котораго основаніемъ было бы $mnpq$, а боковыми сторонами оставшіеся прямоугольники, имѣющіе одну и ту же высоту, имѣлъ бы наибольшій объемъ.



Отв. Бокъ чернаго квадрата есть $\frac{a}{6}$, а искомый объемъ (maximum) $\frac{2a^3}{27}$

X. Намѣчаютъ на нѣкоторой прямой нѣсколько равноотстоящихъ одна отъ другой точекъ и нумеруютъ ихъ числами 1, 2, 3, ..., n Найти на этой прямой такую точку, чтобы сумма квадратовъ ея разстояній до данныхъ точекъ, умноженныхъ на соотвѣтствующіе нумера, была бы minimum.

Отв. Для рѣшенія этого вопроса необходимо знать, что сумма n первыхъ чиселъ равна $\frac{n(n+1)}{2}$, сумма ихъ квадратовъ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ и сумма

ихъ кубовъ $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. Обозначая черезъ a разстояніе двухъ послѣдовательныхъ точекъ и черезъ x разстояніе искомой точки до первой, выразимъ въ зависимости отъ x указанную сумму и, пользуясь методомъ **§ 311**-го, найдемъ, что $x = \frac{2}{3}(n-1)a$.

XI. Та же задача, но только при томъ предположеніи, что точки занумерованы числами 1, 3, 6, 10, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$.

Отв. По тому же методу найдемъ, что $x = \frac{3}{4}(n-1)a$.

XII. **Найти maximum площади прямоугольнаго треугольника, зная, что сумма гипотенузы съ соотвѣтствующею высотою равна a.**

Отв. Искомый maximum равенъ $\frac{a^2}{9}$. Гипотенуза есть $\frac{2a}{3}$, а высота $\frac{a}{3}$. Катеты равны $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

XIII. **Какой изъ всѣхъ прямоугольныхъ треугольниковъ съ периметромъ $2p$ будетъ имѣть сумму катетовъ съ высотою, опущенною на гипотенузу, наибольшую?**

Отв. По общему методу находимъ, что искомый треугольникъ есть равнобедренный, что его гипотенуза равна $2p(\sqrt{2}-1)$, его высота есть $p(\sqrt{2}-1)$, а каждый катетъ равенъ $p(2-\sqrt{2})$.

XIV. Вписать въ кругъ радіуса r равнобочную трапецію, непараллельныя стороны которой были бы по a, а площадь—наибольшая (maximum).

Отв. Находимъ, что такая трапеція есть прямоугольникъ, основанія котораго равны $\sqrt{4r^2-a^2}$.

XV. Вписать въ шаръ радіуса R конусъ, полная поверхность котораго была бы maximum.

Отв. Прилагая методъ **§ 321**-го, находимъ, что высота искомаго конуса равна $\frac{R(23-\sqrt{17})}{16}$.

XVI. **Описываютъ около сферы радіуса R правильную пирамиду, основаніями которой служатъ правильные восьмиугольники. Найти minimum объема при измѣненіи наклоненія α боковыхъ сторонъ къ основанію.**

Отв. Объемъ выразится формулою

$$V = \frac{16(\sqrt{2}-1)R^3}{3}\left(\frac{4}{\sin^2\alpha}-1\right),$$

а въ случаѣ minimum'а

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \quad V = 16(\sqrt{2}-1)R^3.$$

XVII. Небольшая бѣлая площадка расположена горизонтально на столѣ и освѣщена лампою, разстояние которой до этой площадки имѣетъ горизонтальную проекцію постоянную и равную d. На какой высотѣ должно находиться пламя, чтобы площадка была освѣщена возможно сильнѣе?

Отв. Извѣстно, что напряженность свѣта, получаемаго площадкою, пропорціональна синусу наклоненія лучей и обратно пропорціональна квадрату разстоянія, отдѣляющаго свѣтящуюся точку отъ площадки. Обозначая черезъ α уголъ наклоненія, находимъ, для случая maximum'а, по методу **§ 315**-го:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{откуда} \quad x = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Построить рѣшеніе.

XVIII. Найти minimum выраженія $\frac{\operatorname{tang}3a}{\operatorname{tang}^3 a}$, когда a измѣняется отъ 0^0 до 30^0.

Отв. Полагая $\operatorname{tang}a = x$ и замѣняя $\operatorname{tang}3a$ его значеніемъ, выраженнымъ черезъ x, находимъ по обычному методу (**§ 311**), что maximum есть $(17-12\sqrt{2})$, который не можетъ быть принятъ, такъ какъ онъ соотвѣтствуетъ $x = \sqrt{2}+1$; далѣе, что minimum есть $(17+12\sqrt{2})$, который можетъ быть принятъ и который соотвѣтствуетъ $x = \sqrt{2}-1$, т. е. соотвѣтствуетъ $a = \frac{\pi}{8}$.

XIX. Два тѣла, массы которыхъ m и m', движутся въ одномъ и томъ же направленіи со скоростями v и v' до столкновенія. Найти общую скорость x послѣ столкновенія, зная, что сумма произведеній, полученныхъ отъ умноженія каждой массы на квадратъ измѣненія скорости есть minimum.

Отв. Количество, которое дастъ minimum, есть трехчленъ 2-ой степени относительно x, прилагая правило **§ 307**-го, находимъ:

$$x = \frac{mv + m'v'}{m + m'}$$

XX. Дано $x + y = a$. Распространить правило **§ 315**-го, дающее maximum для $x^p y^q$, на случай, когда p и q дробныя.

Отв. Такъ какъ всегда можно положить $p = \frac{p'}{d}$, $q = \frac{q'}{d}$, то достаточно замѣтить, что тогда $x^p y^q = \sqrt[d]{x^{p'} y^{q'}}$.

XXI. Найти minimum выраженія $\left(x^p + \frac{1}{x^q}\right)$, гдѣ p и q — цѣлыя или дробныя, а x положительно.

Отв. Полагая $x^p = y$, $\frac{1}{x^q} = z$, находимъ (**§ 317** и предыдущая задача) $\frac{y}{z} = \frac{q}{p}$, откуда $x = \sqrt[p+q]{\frac{q}{p}}$.

XXII. Дано уравненіе

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Требуется найти крайніе предѣлы для значеній одной изъ трехъ перемѣнныхъ, напр. x.

Отв. Ходъ рѣшенія подобенъ ходу рѣшенія задачи **§ 310**-го

XXIII. Найти minimum выраженія $x^2 + y^2 + z^2 + u^2$, зная, что

$$ax + by + cz + du = k.$$

Отв. Ходъ рѣшенія подобенъ ходу рѣшенія задачи **§ 325**-го.

XXIV. Найти maximum выраженія $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2}$.

Отв. Находимъ (**§ 306**) $x = \frac{2ab}{a-b}$ и $\frac{(x+a)(x-b)}{x^2} = \frac{(a+b)^2}{4ab}$.

XXV. Выраженіе $a + x + \frac{(a+x)^2}{a-x}$ можетъ принимать какія-угодно значенія.

XXVI. Найти minimum выраженія $\frac{a+x}{a-x} + \frac{a-x}{a+x}$.

Отв. $x = 0$ и minimum равенъ 2.

XXVII. Два перемѣнныхъ положительныхъ числа x и y таковы, что разность ихъ есть положительное число a. Спрашивается, можетъ ли выраженіе $\frac{x^m}{y^n}$, гдѣ m и n—данныя положительныя числа, имѣть maximum или minimum.

Отв. Если $x < y$, $m < n$, то находимъ (**§ 315**) maximum при $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.

Если $x > y$, $m > n$, то находимъ minimum при $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$.

Но если $x < y$, $m > n$ или $x > y$, $m < n$, то нѣтъ ни maximum ни minimum.

КНИГА IV

Прогрессіи и логариѳмы

ГЛАВА ПЕРВАЯ

Прогрессіи

I. Ариѳметическія прогрессіи

§ 326. Опредѣленія.—*Ариѳметической* или *разностной прогрессіей* называется рядъ такихъ чиселъ, каждое изъ которыхъ больше или меньше предыдущаго на постоянное количество, называемое *разностью прогрессіи.*

Когда члены идутъ, увеличиваясь, прогрессія — *возрастающая*, а когда они идутъ, уменьшаясь, прогрессія—*убывающая.*

Что нѣкоторыя числа составляютъ прогрессію, это обозначаютъ тѣмъ, что пишутъ ихъ одно за другимъ, отдѣляя другъ отъ друга точкою, и впереди ставятъ знакъ ÷; такъ, напр., ряды:

$$\div\ 3\ .\ 7\ .\ 11\ .\ 15\ .\ 19\ .\ 23\ .\ 27\ \ldots$$

$$\div\ 48\ .\ 45\ .\ 42\ .\ 39\ .\ 36\ .\ 33\ .\ 30\ \ldots$$

представляютъ ариѳметическія погрессіи, при чемъ одна изъ нихъ возрастающая, другая — убывающая: разности ихъ равны соотвѣтственно 4 и 3.

Нѣтъ надобности различать, какъ указано выше, возрастающую и убывающую прогрессіи, если *условиться* понимать подъ *разностью прогрессіи избытокъ какого-нибудь ея члена надъ предыдущимъ.* Если прогрессія—убывающая, то этотъ избытокъ отрицателенъ. Напр., вторая изъ вышенаписанныхъ прогрессій имѣетъ разность — 3.

Вообще, мы будемъ обозначать члены разностной прогрессіи буквами $a, b, c, \ldots, i, k, l \ldots$, разность — будетъ ли она поло-

жительна или отрицательна—буквой r и число, показывающее порядокъ члена l, т.-е. какое онъ занимаетъ мѣсто, черезъ n, такимъ образомъ мы будемъ писать:

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots i \,.\, k \,.\, l \ldots . \qquad (1)$$

§ 327. Значеніе n-го члена прогрессіи.—По опредѣленію каждый членъ возрастающей прогрессіи образуется чрезъ прибавленіе разности прогрессіи къ предыдущему члену, т.-е. второй членъ равенъ $a + r$, третій $a + 2r$, четвертый $a + 3r$, ..., n-ый $a + (n-1)r$. Слѣдовательно, *какой-угодно членъ прогрессіи получается чрезъ прибавленіе къ первому члену разности прогрессіи, повторенной столько разъ, сколько предшествуетъ ему членовъ*. Итакъ, пишемъ формулу

$$l = a + (n-1)r, \qquad (2)$$

которая прилагается и къ убывающей прогрессіи, лишь бы буква r обозначала отрицательное число (**§ 326**).

§ 328. Слѣдствіе. — Формула (2), связывающая четыре числа a, l, r, n, даетъ возможность опредѣлить одно изъ нихъ, когда три другія извѣстны: для этого достаточно рѣшить уравненіе относительно неизвѣстнаго количества. Понятно, что при помощи этой формулы мы можемъ рѣшить четыре задачи, формулы рѣшеній которыхъ слѣдующія:

$$\left.\begin{array}{ll} l = a + (n-1)r, & a = l - (n-1)r, \\ r = \dfrac{l-a}{n-1}, & n = 1 + \dfrac{l-a}{r}. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

§ 329. Вставленіе среднихъ ариѳметическихъ.—Вставить m среднихъ ариѳметическихъ между двумя данными числами a и b значитъ найти такую прогрессію, для которой a и b были бы крайними, а m среднихъ ариѳметическихъ — промежуточными членами.

Для рѣшенія этой задачи, очевидно, достаточно найти разность прогрессіи, такъ какъ, прибавляя ее къ первому члену, получимъ второй, прибавляя ко второму, получимъ третій, и т. д. Но къ искомой прогрессіи извѣстенъ первый членъ a, послѣдній b и число членовъ $(m+2)$, а потому, прилагая формулу (2), получимъ:

$$r = \frac{b-a}{m+1}. \qquad (4)$$

Примѣръ. — Вставить 10 среднихъ ариѳметическихъ между 5 и 38. Разность прогрессіи $r = \frac{38-5}{11} = 3$; слѣдовательно, искомая прогрессія будетъ

$$\div 5 . 8 . 11 . 14 . 17 . 20 . 23 . 26 . 29 . 32 . 35 . 38 .$$

§ 330. Задача. — *Опредѣлить условіе, при которомъ три данныхъ числа, a, b, c, суть члены одной и той же прогрессіи.*

Допустимъ, что эти числа расположены въ возрастающемъ или убывающемъ порядкѣ. Въ неизвѣстной прогрессіи они будутъ отдѣлены другъ отъ друга промежуточными членами, которые можно разсматривать, какъ средніе ариѳметическіе, вставленные между a и b и между b и c. Слѣдовательно, если обозначить число этихъ среднихъ черезъ $(m-1)$ и $(n-1)$, то разность прогрессіи будетъ равна (**§ 329**) $\frac{b-a}{m}$ и $\frac{c-b}{n}$, и мы можемъ написать равенство:

$$\frac{b-a}{m} = \frac{c-b}{n} . \qquad (5)$$

Это и есть искомое условіе. Итакъ, *необходимо, чтобы существовало два цѣлыхъ числа m и n, пропорціональныхъ разностямъ* $(b-a)$ и $(c-b)$.

Это условіе всегда будетъ выполнено, когда числа a, b, c соизмѣримы, такъ какъ если даже $(b-a)$ и $(c-b)$ окажутся дробными, то достаточно привести ихъ къ общему знаменателю и новыхъ числителей принять за m и n. Умножая оба результата на одно и то же произвольное цѣлое число, мы получимъ другія значенія для m и n; слѣдовательно, задача имѣетъ безчисленное множество рѣшеній.

§ 331. Теорема. — *Если между каждыми двумя послѣдовательными членами прогрессіи* (1) *вставить одно и то же число m среднихъ ариѳметическихъ, то получится всего одна прогрессія, разность которой будетъ равна частному отъ дѣленія первоначальной разности на* $(m+1)$.

Въ самомъ дѣлѣ, разности различныхъ частныхъ прогрессій равны (**§ 329**):

$$\frac{b-a}{m+1}, \frac{c-b}{m+1}, \frac{d-c}{m+1}, \ldots,$$

т.-е всѣ онѣ равны $\frac{r}{m+1}$ (**§ 326**). Кромѣ того, послѣдній членъ каждой прогрессіи равенъ первому члену слѣдующей; слѣдовательно, можно разсматривать эти прогрессіи, какъ одну.

§ 332. Теорема.—*Во всякой конечной прогрессіи сумма двухъ членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ, постоянна и равна суммѣ крайнихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, въ прогрессіи

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ldots i \,.\, k \,.\, l$$

второй членъ b равенъ $a+r$, а предпослѣдній k равенъ $l-r$, слѣдовательно, ихъ сумма $b+k=a+l$.

Вообще, членъ x, занимающій $(p+1)$-ое мѣсто отъ начала, равенъ (**§ 327**) $a+pr$, а членъ y, занимающій $(p+1)$-ое мѣсто отъ конца, равенъ $l-pr$; слѣдовательно ихъ сумма $x+y$ равна $a+l$.

§ 333. Сумма членовъ прогрессіи.—Назовемъ черезъ S сумму членовъ прогрессіи, начинающейся съ a, оканчивающейся членомъ l и имѣющей n членовъ. Пишемъ:

$$S=a+b+c+d+\ldots+i+k+l.$$

Сумма не измѣнится отъ перестановки членовъ; напишемъ ихъ въ обратномъ порядкѣ, такъ чтобы члены, равноотстоящіе отъ концовъ, расположились бы въ прежней и новой строкахъ соотвѣтственно одинъ подъ другимъ, т.-е.

$$S=l+k+i+\ldots+d+c+b+a.$$

Складывая теперь члены двухъ этихъ рядовъ по столбцамъ, получимъ:

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+i)+\ldots+(i+c)+(k+b)+(l+a).$$

Всѣ же суммы, заключенныя въ скобкахъ, равны $(a+l)$ (**§ 332**); кромѣ того, число ихъ равно числу членовъ прогрессіи; слѣдовательно,

$$2S=(a+l)n,$$

откуда

$$S=\frac{(a+l)n}{2}. \qquad (6)$$

Сумма членовъ разностной прогрессіи равна половинѣ произведенія суммы крайнихъ на число членовъ.

Примѣръ. — Сумма 12 членовъ прогрессіи (§ 329) равна $\frac{(5+38)\times 12}{2}$, или 258.

Замѣчаніе.—Если бы были извѣстны только первый членъ a, разность прогрессіи r и число членовъ n, то, чтобы воспользоваться предыдущею формулою, надо было бы сначала вычислить послѣдній членъ l по формулѣ (2). Подставляя это значеніе въ формулу (6), получимъ:

$$S = \frac{[2a + (n-1)r]n}{2}. \qquad (7)$$

§ 334. Приложенія. — 1) Найти сумму n первыхъ цѣлыхъ чиселъ:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Такъ какъ они составляютъ прогрессію, разность которой равна 1, то сумма ихъ

$$S = \frac{(1+n)n}{2}, \quad \text{или} \quad S = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (8)$$

Итакъ, *чтобы получить сумму n первыхъ цѣлыхъ чиселъ, умножаютъ послѣдній членъ на тотъ, который за нимъ слѣдовалъ бы непосредственно если продолжить прогрессію, и произведеніе дѣлятъ на* 2.

2) Найти сумму n первыхъ нечетныхъ чиселъ:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$$

Они образуютъ прогрессію, разность которой равна 2; прилагая формулу (7), получимъ:

$$S = \frac{[2 + 2(n-1)]n}{2}, \quad \text{или} \quad S = n^2. \qquad (9)$$

Такимъ образомъ, *сумма первыхъ n нечетныхъ чиселъ равна квадрату n.*

§ 335. Задачи. — Формулы (2) и (6) даютъ два соотношенія между количествами a, l, r, n, S, соотношенія, при помощи которыхъ можно опредѣлить два изъ этихъ количествъ, когда даны три остальныхъ. Отсюда заключаемъ, что можно рѣшить десять слѣдующихъ задачъ:

1.	Даны.	a, l, r,	опредѣлить	n, S;
2.	„	a, l, n,	„	r, S;
3.	„	a, l, S,	„	r, n;
4.	„	a, r, n,	„	l, S;
5.	„	a, r, S,	„	l, n;
6.	„	a, n, S,	„	l, r;
7.	„	l, r, n,	„	a, S;
8.	„	l, r, S,	„	a, n;
9.	„	l, n, S,	„	a, r;
10.	„	r, n, S,	„	a, l.

Изъ этихъ задачъ пятая и восьмая—задачи второй степени, остальныя—первой.

II. Геометрическія прогрессіи

§ 336. Опредѣленія. — *Геометрическая* или *кратная* прогрессія есть рядъ чиселъ, каждое изъ которыхъ равно предыдущему, умноженному на постоянное число, называемое *знаменателемъ прогрессіи*.

Если знаменатель прогрессіи больше единицы, то члены идутъ, возрастая, и прогрессія будетъ *возрастающая*; если же знаменатель прогрессіи меньше единицы, то члены идутъ, уменьшаясь, и прогрессія будетъ *убывающая*.

Для обозначенія того, что числа составляютъ геометрическую прогрессію, пишутъ ихъ одно за другимъ, отдѣляя другъ отъ друга двумя точками, и ставятъ впереди знакъ $\div\!\!\div$.

Примѣры. — Ряды:

$$\div\!\!\div 4 : 12 : 36 : 108 : 324 : 972 : \ldots,$$

$$\div\!\!\div 528 : 264 : 132 : 66 : 33 : 16\tfrac{1}{2} : \ldots$$

представляютъ двѣ геометрическія прогрессіи, изъ которыхъ первая — возрастающая, а вторая — убывающая; знаменатели ихъ 3 и $\frac{1}{2}$.

Вообще, мы будемъ обозначать члены геометрической прогрессіи буквами $a, b, c, d, \ldots, i, k, l, \ldots$, знаменатель — буквою q и порядокъ мѣста, занимаемаго членомъ l—буквою n. Мы будемъ писать:

$$\div\!\!\div a : b : c : d : \ldots : i : k : l : \ldots \qquad (1)$$

§ 337. Значеніе n-го члена прогрессіи. — По опредѣленію, какой-угодно членъ геометрической прогрессіи получается отъ умноженія предыдущаго члена на знаменателя прогрессіи, т.-е. второй членъ равенъ aq, третій aq^2, четвертый aq^3, ..., n-ый aq^{n-1}. Слѣдовательно, *членъ, занимающій какое-угодно мѣсто, равенъ первому, умноженному на степень знаменателя, показатель которой равенъ числу предшествующихъ ему членовъ*. Итакъ, пишемъ формулу

$$l = aq^{n-1}. \qquad (2)$$

§ 338. Слѣдствіе. — Формула (2) представляетъ зависимость между четырьмя числами a, l, q, n, что даетъ возможность опредѣлить одно изъ нихъ, когда три остальныхъ извѣстны. Рѣшая послѣ-

довательно уравненіе (2) относительно каждаго изъ этихъ четырехъ количествъ, находимъ формулы:

$$\left.\begin{aligned} l = aq^{n-1}, \qquad a = \frac{l}{q^{n-1}}, \\ q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}, \quad n = 1 + \frac{\log l - \log a}{\log q}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Послѣдняя формула предполагаетъ извѣстными основныя свойства логариѳмовъ (§ 365 и слѣд.).

§ 339. Теорема. — *Если прогрессія — возрастающая, то можно всегда продолжить ее настолько, что члены ея станутъ превосходить всякій данный предѣлъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая три послѣдовательныхъ члена i, k, l прогрессіи (1), по опредѣленію имѣемъ:

$$k = iq, \quad l = kq;$$

а послѣ вычитанія:

$$l - k = (k - i)q.$$

Но знаменатель прогрессіи q больше единицы; слѣдовательно, разность $(l - k)$ больше разности $(k - i)$, а потому избытокъ какого-нибудь члена надъ предыдущимъ идетъ, возрастая. Если бы этотъ избытокъ оставался постояннымъ, какъ въ ариѳметической прогрессіи, то, прибавляя его къ первому члену a достаточно большое число разъ, мы могли бы получить сколь-угодно большой результатъ. Здѣсь же избытокъ идетъ, увеличиваясь; значитъ, и подавно (*à fortiori*) этотъ результатъ мы можемъ сдѣлать сколь-угодно большимъ.

§ 340. Теорема. — *Если прогрессія — убывающая, то ее можно продолжить достаточно далеко, чтобы члены ея стали меньше всякаго предѣла*

Въ самомъ дѣлѣ, если знаменатель q прогрессіи (1) меньше единицы, то члены ея $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \ldots, \frac{1}{i}, \frac{1}{k}, \frac{1}{l}, \ldots$ образуютъ другую кратную прогрессію, знаменатель которой $\frac{1}{q}$ больше единицы, потому что изъ равенствъ

$$b = a \cdot q, \quad c = b \cdot q, \quad d = c \cdot q, \ldots$$

вытекаетъ:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{q}, \ldots$$

Итакъ, по предыдущей теоремѣ можемъ заключить, что дроби $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{l}$ могутъ сдѣлаться сколь-угодно большими, а потому ихъ знаменатели i, k, l могутъ сдѣлаться сколь-угодно малыми, что и требовалось доказать.

§ 341. Вставленіе среднихъ геометрическихъ.—Вставить m среднихъ геометрическихъ между двумя данными числами a и b значитъ найти такую кратную прогрессію, въ которой a и b были бы крайними, а эти m среднихъ геометрическихъ — промежуточными членами.

Очевидно, что для рѣшенія этого вопроса достаточно найти знаменатель прогрессіи, такъ какъ, умножая на него первый членъ, получимъ второй, умножая второй, получимъ третій, и т. д. Но въ этой прогрессіи извѣстенъ первый членъ a, послѣдній b и число членовъ $(m+2)$; слѣдовательно, можно воспользоваться формулою (2), по которой найдемъ:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}. \tag{4}$$

Примѣръ. — Вставить три среднихъ геометрическихъ между 7 и 112. Знаменатель прогрессіи будетъ

$$q = \sqrt[4]{\frac{112}{7}} = 2,$$

и искомая прогрессія напишется такъ:

$$\div 7 . 14 . 28 . 56 : 112$$

§ 342. Теорема. — *Если между каждыми двумя послѣдовательными членами геометрической прогрессіи вставить одно и то же число m среднихъ геометрическихъ, то получится всего одна прогрессія, знаменатель которой будетъ равенъ корню $(m+1)$-ой степени изъ первоначальнаго знаменателя.*

Въ самомъ дѣлѣ, знаменатели различныхъ частныхъ прогрессій выразятся формулами:

$$\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \quad \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}, \quad \sqrt[m+1]{\frac{d}{c}}, \ldots$$

и потому всѣ они равны $\sqrt[m+1]{q}$. Кромѣ того, послѣдній членъ каждой прогрессіи есть въ то же время первый членъ слѣдующей; отсюда заключаемъ, что всѣ эти прогрессіи можно разсматривать, какъ одну.

§ 343. Задача.—*Опредѣлить условіе, при которомъ три числа a, b, c были бы членами одной и той же прогрессіи.*

Разсматривая a, какъ первый членъ, обозначимъ черезъ m и n неизвѣстное число членовъ, предшествующихъ b и c, и тогда будемъ имѣть (§ 337):

$$b = aq^m, \quad c = aq^n,$$

гдѣ q неизвѣстный знаменатель. Возвышая первое уравненіе въ n-ую, а второе—въ m-ую степень, получимъ:

$$b^n = a^n q^{mn}, \quad c^m = a^m q^{mn},$$

откуда, по исключеніи q,

$$\frac{b^n}{a^n} = \frac{c^m}{a^m}, \quad \text{или} \quad \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{c}{a}\right)^m. \tag{5}$$

Это и есть искомое условіе. Оно упрощается, если предположимъ, что a, b, c соизмѣримы, такъ какъ тогда, приводя отношенія $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{a}$ къ ихъ простѣйшимъ выраженіямъ и обозначая черезъ $\frac{g}{h}$ и $\frac{k}{l}$ равныя имъ несократимыя дроби, можемъ написать:

$$\left(\frac{g}{h}\right)^n = \left(\frac{k}{l}\right)^m, \quad \text{или} \quad \frac{g^n}{h^n} = \frac{k^m}{l^m}.$$

Вновь полученныя дроби, будучи также несократимыми, могутъ быть равными только въ томъ случаѣ, если

$$g^n = k^m, \quad h^n = l^m;$$

а это требуетъ, съ одной стороны, чтобы g и k состояли изъ такихъ же первоначальныхъ множителей, какъ h и l, и съ другой стороны, чтобы показатели одного и того же множителя, въ g и k, и въ h и l, были въ постоянномъ отношеніи $\frac{m}{n}$. Если эти условія выполнены, то они опредѣляютъ отношеніе $\frac{m}{n}$, при чемъ m

и n въ отдѣльности остаются неопредѣленными; слѣдовательно, a, b, c могутъ быть членами безчисленнаго множества прогрессій.

§ 344. **Приложеніе.** — *Какія соизмѣримыя числа могутъ быть членами геометрической прогрессіи вмѣстѣ съ числами* 1 *и* 10?

Обозначимъ черезъ $\frac{p}{q}$ одно изъ искомыхъ чиселъ; на основаніи предыдущаго

$$\left(\frac{p}{q}\right)^m = 10^n, \text{ или } \frac{p^m}{q^m} = 10^n,$$

гдѣ m и n цѣлыя числа. Но вторая часть есть цѣлое число; слѣдовательно, первая тоже должна быть цѣлымъ числомъ, а такъ какъ, по предположенію, дробь $\frac{p^m}{q^m}$ несократима, то необходимо, чтобы $q=1$ и, слѣдовательно, $p^m=10^n$. Это же послѣднее равенство имѣетъ мѣсто въ томъ случаѣ, если p не содержитъ другихъ первоначальныхъ множителей, кромѣ тѣхъ, изъ которыхъ состоитъ 10, т. е. 2 и 5, иначе говоря, если $p=2^\alpha \times 5^\beta$. Отсюда вытекаетъ, что $2^{\alpha m} \times 5^{\beta m} = 2^n \times 5^n$, а потому непремѣнно $\alpha m = \beta m = n$, или $\alpha = \beta = \frac{n}{m}$. Такимъ образомъ показатели множителей 2 и 5 числа p должны быть равны, или, иными словами, p должно быть степенью 10.

Итакъ, изъ соизмѣримыхъ чиселъ только степени 10 могутъ быть членами такой геометрической прогрессіи, въ которую входятъ такъ же, какъ члены, числа 1 и 10.

§ 345. **Теорема.**—*Во всякой геометрической прогрессіи произведеніе двухъ членовъ, равноотстоящихъ отъ концовъ, постоянно и равно произведенію крайнихъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ дана прогрессія съ конечнымъ числомъ членовъ:

$$\because a : b : c : d : \ldots : i : k : l;$$

второй членъ b равенъ aq, предпослѣдній k равенъ $\frac{l}{q}$; слѣдовательно, ихъ произведеніе $bk = al$. Вообще, членъ x, занимающій $(p+1)$-ое мѣсто отъ начала, равенъ aq^p, а членъ y, занимающій $(p+1)$-ое мѣсто отъ конца, равенъ $\frac{l}{q^p}$. Отсюда вытекаетъ, что ихъ произведеніе $xy = al$.

§ 346. **Произведеніе членовъ прогрессіи.** — Обозначимъ черезъ P произведеніе членовъ прогрессіи, начинающейся съ a, оканчивающейся членомъ l и имѣющей n членовъ. Пишемъ:

$$P = abcd \ldots ikl.$$

Произведеніе не измѣнится отъ перестановки множителей; поэтому мы можемъ размѣстить ихъ въ обратномъ порядкѣ:

$$P = lki \ldots dcba.$$

Перемножимъ по-членно эти два равенства, группируя множители, равноотстоящіе отъ концовъ, попарно:

$$P^2 = (al)(bk)(ci) \ldots (ic)(kb)(la).$$

Но всѣ произведенія въ скобкахъ равны al (§ 345). Кромѣ того, число ихъ равно числу членовъ прогрессіи; слѣдовательно,

$$P^2 = (al)^n,$$

откуда

$$P = \sqrt{(al)^n}. \qquad (6)$$

Итакъ, *произведеніе членовъ прогрессіи равно квадратному корню изъ степени произведенія крайнихъ членовъ, показатель которой есть число членовъ.*

§ 347. Сумма членовъ геометрической прогрессіи. — Обозначимъ черезъ S сумму членовъ предыдущей прогрессіи, такъ что

$$S = a + b + c + d + \ldots + i + k + l.$$

Умноживъ обѣ части этого равенства на q, получимъ:

$$Sq = aq + bq + cq + dq + \ldots + iq + kq + lq.$$

Но, по опредѣленію, $aq = b$, $bq = c$, $cq = d$, ..., $iq = k$, $kq = l$; слѣдовательно, предыдущее равенство преобразовывается въ такое:

$$Sq = b + c + d + \ldots + k + l + lq.$$

Если предположить $q > 1$ и вычесть S изъ Sq, то, по сокращеніи одинаковыхъ членовъ въ обѣихъ частяхъ, напишемъ:

$$Sq - S = lq - a, \quad \text{или} \quad S(q-1) = lq - a,$$

откуда

$$S = \frac{lq - a}{q - 1}. \qquad (7)$$

Итакъ, *чтобы получить сумму членовъ возрастающей геометрической прогрессіи, надо вычесть первый членъ изъ произведенія послѣдняго*

члена на знаменатель прогрессіи и полученную разность раздѣлить на избытокъ знаменателя надъ единицею.

Предполагая же $q < 1$, мы уже не можемъ вычитать S изъ Sq; вычитаемъ тогда Sq изъ S и пишемъ:

$$S - Sq = a - lq, \text{ или } S(1-q) = a - lq,$$

откуда

$$S = \frac{a - lq}{1 - q}. \tag{8}$$

Итакъ, *чтобы получить сумму членовъ убывающей прогрессіи, надо вычесть изъ перваго члена произведеніе послѣдняго на знаменатель прогрессіи и полученную разность раздѣлить на избытокъ единицы надъ знаменателемъ.*

Но соглашенія относительно отрицательныхъ чиселъ даютъ возможность этотъ второй видъ [формулу (8)] считать равносильнымъ первому (7).

Замѣчаніе. — Если бы были извѣстны только первый членъ a, знаменатель прогрессіи q и число членовъ n, то, чтобы воспользоваться предыдущими формулами, пришлось бы сначала вычислить послѣдній членъ l по формулѣ (2), а затѣмъ его значеніе подставить въ формулы (7) и (8); тогда мы будемъ имѣть:

$$(9) \qquad S = \frac{aq^n - a}{q - 1}, \quad \text{и} \quad S = \frac{a - aq^n}{1 - q}. \qquad (10)$$

§ 348. Предѣлъ суммы членовъ убывающей прогрессіи. — Формула (8), дающая сумму членовъ убывающей прогрессіи, можетъ быть написана такъ:

$$S = \frac{a}{1-q} - \frac{lq}{1-q}.$$

Но если число членовъ безконечно возрастаетъ, то выраженіе $\frac{a}{1-q}$, зависящее только отъ перваго члена и знаменателя прогрессіи, сохраняетъ постоянно одно и то же значеніе, а произведеніе $l\frac{q}{1-q}$, составленное изъ множителя l, убывающаго безпредѣльно (§ 340), и постояннаго множителя $\frac{q}{1-q}$, можетъ стать сколь-угодно малымъ. Поэтому, сумма членовъ, оставаясь всегда меньше

$\frac{a}{1-q}$, можетъ отличаться отъ $\frac{a}{1-q}$ на сколь-угодно малую величину при достаточно большомъ числѣ членовъ; иными словами, $\frac{a}{1-q}$ есть предѣлъ, къ корому стремится сумма, по мѣрѣ того какъ число членовъ безпредѣльно растетъ. Обозначая этотъ предѣлъ черезъ s, пишемъ:

$$s = \frac{a}{1-q}. \tag{11}$$

§ 349. Приложеніе.—Десятичная періодическая дробь можетъ быть разсматриваема, какъ безконечно-убывающая прогрессія, и поэтому къ ней приложима формула (11).

Пусть, напр., дана періодическая дробь

0,3535353535 . .

Если раздѣлить ее на грани по 2 цифры въ каждой, начиная отъ запятой, то ее можно разсматривать, какъ предѣлъ суммы членовъ безконечно-убывающей геометрической прогрессіи

$$\div\!\div \frac{35}{100} : \frac{35}{10000} : \frac{35}{1000000} : \frac{35}{100000000} : \ldots$$

со знаменателемъ $\frac{1}{100}$. По формулѣ (11) этотъ предѣлъ равенъ

$$\frac{\frac{35}{100}}{1-\frac{1}{100}}, \text{ или } \frac{35}{99};$$

результатъ точно такой же, какой дается и въ ариѳметикѣ, въ теоріи періодическихъ дробей.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Опредѣлить ариѳметическія прогрессіи, въ которыхъ сумма двухъ какихъ-угодно членовъ есть также членъ прогрессіи.

Отв. Это—такія прогрессіи, въ которыхъ первый членъ есть кратное относительно разности прогрессіи.

II. Опредѣлить геометрическія прогрессіи, въ которыхъ произведеніе двухъ какихъ-угодно членовъ есть также членъ прогрессіи.

Отв. Это—такія прогрессіи, въ которыхъ первый членъ есть степень знаменателя прогрессіи.

III. Если въ нѣкоторомъ рядѣ чиселъ каждое изъ нихъ есть полусумма тѣхъ, между которыми оно стоитъ, то эти числа образуютъ ариѳметическую прогрессію. Если же каждое изъ нихъ есть средняя пропорціональная между тѣми, которыя его заключаютъ, то они образуютъ геометрическую прогрессію.

Отв. Эти задачи непосредственно сводятся на опредѣленія (§§ 326 и 336).

IV. Въ какихъ ариѳметическихъ прогрессіяхъ существуетъ отношеніе, не зависящее отъ n, между суммою n первыхъ членовъ и суммою n слѣдующихъ?

Отв. Это—такія прогрессіи, разность которыхъ равна удвоенному первому члену (см. стран 188, упражн. III).

V. Могутъ ли быть членами одной и той же прогрессіи, ариѳметической или геометрической, числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{7}$?

Отв. Нѣтъ (§§ 330 и 343).

VI. Если раздѣлить рядъ нечетныхъ чиселъ 1, 3, 5, 7, ... на такія группы, изъ которыхъ первая состояла бы изъ одного члена, вторая изъ двухъ, третья — изъ трехъ, и т. д., то сумма всѣхъ членовъ каждой группы представитъ точный кубъ.

Отв. Составляемъ первый и послѣдній членъ n-ой группы и прилагаемъ формуку (6) § 333-го: найдемъ, что сумма равна n^3

VII. Данъ рядъ 1, 2, 4, 6, 8, 10, ...; сумма n первыхъ его членовъ есть нечетное число. Если къ этому послѣднему мы прибавимъ $(n-1)$ слѣдующихъ за нимъ нечетныхъ чиселъ, то получимъ кубъ.

Отв. Въ результатѣ получимъ n^3, пользуясь тѣмъ же пріемомъ.

VIII. Въ геометрической прогрессіи, состоящей изъ шести членовъ, разность между крайними членами превышаетъ разность между средними болѣе, чѣмъ въ 5 разъ.

Отв. Выражаемъ отношеніе двухъ разностей въ зависимости отъ знаменателя прогрессіи и находимъ, что minimum этого отношенія есть 5.

IX. Данъ рядъ, состоящій изъ такихъ членовъ, что каждый изъ нихъ есть полусумма двухъ предыдущихъ; зная два первыхъ члена a и b этого ряда, найти предѣлъ, къ которому онъ стремится по мѣрѣ все бо́льшаго и бо́льшаго возрастанія числа членовъ.

Отв. $\frac{a+2b}{3}$.

X. Пусть будетъ дана какая-нибудь линія AB, на ней отмѣчаютъ ея середину C, затѣмъ отмѣчаютъ середину D отрѣзка CB, далѣе — середину E отрѣзка DC, далѣе — середину F отрѣзка ED, далѣе — середину G отрѣзка FE и такъ до безконечности. Найти, къ какому предѣлу приближаются точки C, D, E, F, G, по мѣрѣ того какъ

A C E G F D B

число ихъ все болѣе и болѣе растетъ.

Отв. Предѣльная точка находится отъ точки B на разстояніи, равномъ одной трети AB.

XI. Найти предѣлъ суммы дробей:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\ldots,$$

числители которыхъ идутъ въ ариѳметической прогрессіи, а знаменатели въ геометрической.

Отв. Разлагаемъ этотъ рядъ на нѣсколько геометрическихъ убывающихъ прогрессій и находимъ, что предѣлъ равенъ 2.

XII. Данъ рядъ чиселъ

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ \ldots$$

такихъ, что разность каждыхъ двухъ послѣдовательныхъ изъ нихъ увеличивается все время на 1; найти сумму n первыхъ членовъ этого ряда.

Отв. Находимъ, что n-ый членъ равенъ $\frac{n(n+1)}{2}$ и что искомая сумма есть $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

XIII. Въ геометрической прогрессіи, число членовъ которой нечетное, сумма квадратовъ всѣхъ членовъ равна суммѣ всѣхъ членовъ, умноженной на избытокъ суммы членовъ, занимающихъ нечетныя мѣста, надъ суммою членовъ, занимающихъ четныя мѣста.

Отв. Составляемъ указанныя суммы и безъ труда повѣряемъ справедливость этого равенства.

XIV. Дана ариѳметическая прогрессія, члены которой — цѣлыя числа, и дано число p, взаимно-первое съ разностью прогрессіи. Требуется показать, что если раздѣлить p послѣдовательныхъ членовъ на p, то въ остаткахъ мы получимъ всѣ числа: 0, 1, 2, 3, ..., $(p-1)$.

Отв. Доказывается, что двухъ равныхъ остатковъ получить нельзя.

XV. Данъ треугольникъ; строятъ второй, принявъ за его стороны медіаны перваго, затѣмъ строятъ третій, принявъ за его стороны медіаны второго, и такъ до безконечности. Найти предѣлъ суммы площадей всѣхъ этихъ треугольниковъ.

Отв. Этотъ предѣлъ равенъ учетверенной площади даннаго треугольника.

ГЛАВА ВТОРАЯ

Элементарная теорія логариѳмовъ

I. Опредѣленіе логариѳмовъ

§ 350. Опредѣленіе.—Если разсматриваются двѣ прогрессіи: одна геометрическая, начинающаяся съ единицы, другая ариѳметическая, начинающаяся съ нуля, то члены второй называются *логариѳмами* членовъ первой, занимающихъ соотвѣтственно тѣ же мѣста. Пусть даны двѣ прогрессіи:

$$\left.\begin{array}{l} \because 1:q:q^2:q^3:q^4:\ldots:q^m:\ldots:q^n:\ldots:q^p:\ldots, \\ \div\ 0\,.\,r\,.\,2r\,.\,3r\,.\,4r\ldots\ldots mr\ldots\ldots nr\ldots\ldots pr\ldots; \end{array}\right\} \qquad (1)$$

mr есть логариѳмъ q^m.

Замѣчаніе.—Логариѳмъ числа, разсматриваемаго отдѣльно, вполнѣ произволенъ. Вопросъ, какой логариѳмъ числа 3, не имѣетъ никакого смысла, до тѣхъ поръ пока не выбраны прогрессіи, опредѣляющія *систему* логариѳмовъ, о которыхъ хотятъ говорить.

Во всѣхъ системахъ логариѳмъ 1 есть 0.

§ 351. Распространеніе предыдущаго опредѣленія.— Какъ только выбраны двѣ прогрессіи, опредѣляющія систему логариѳмовъ, то тѣ числа, которыя не будутъ членами геометрической прогрессіи, казалось бы, не должны, по предыдущему опредѣленію, имѣть логариѳмовъ; мы сейчасъ увидимъ, что, распространяя это опредѣленіе, мы всякое число, большее единицы, можемъ разсматривать, какъ имѣющее логариѳмъ.

Вставимъ между двумя послѣдовательными членами каждой изъ прогрессій (1) одно и то же число среднихъ (геометрическихъ

и ариѳметическихъ) членовъ; мы получимъ тогда (§§ 331, 342) двѣ новыя прогрессіи, начинающіяся также: одна съ 1, другая съ 0, при чемъ всѣ взаимно-соотвѣтственные члены въ первоначальныхъ прогрессіяхъ будутъ взаимно-соотвѣтственными членами и въ новыхъ прогрессіяхъ. Слѣдовательно, мы можемъ сказать, что члены, вставленные въ ариѳметическую прогрессію, представляютъ логариѳмы соотвѣтственныхъ членовъ, вставленныхъ въ геометрическую прогрессію.

§ 352. Теорема.—Чтобы такое распространеніе опредѣленія могло быть принято, необходимо доказать, что если, вставляя въ геометрическую прогрессію различное число среднихъ геометрическихъ, мы введемъ, двумя различными способами, одно и то же число, то мы найдемъ каждый разъ для него одинъ и тотъ же логариѳмъ.

Предположимъ, что сначала мы вставили $(p-1)$ среднихъ (геометрическихъ и ариѳметическихъ) между послѣдовательными членами прогрессій (1); тогда знаменатель геометрической прогрессіи будетъ равенъ $\sqrt[p]{q}$ (§ 341), а разность ариѳметической $\frac{r}{p}$ (§ 329). Отсюда слѣдуетъ, что $(k+1)$-ый членъ въ первой прогрессіи равенъ $\left(\sqrt[p]{q}\right)^k$, а соотвѣтствующій членъ во второй $k\frac{r}{p}$.

Теперь предположимъ, что между послѣдовательными членами прогрессій (1) мы вставили другое число $(p'-1)$ среднихъ (геометрическихъ и ариѳметическихъ); $(k+1)$-ый членъ въ первой прогрессіи будетъ $\left(\sqrt[p']{q}\right)^{k'}$, соотвѣтствующій членъ во второй $k'\frac{r}{p'}$.

Докажемъ теперь, что если

$$\left(\sqrt[p]{q}\right)^k=\left(\sqrt[p']{q}\right)^{k'}, \qquad (2)$$

то также и

$$k\frac{r}{p}=k'\frac{r}{p'}, \quad \text{или} \quad \frac{k}{p}=\frac{k'}{p'}.$$

Дѣйствительно, возвышая обѣ части равенства (2) въ степень pp', получимъ:

$$\left(\sqrt[p]{q}\right)^{kpp'}=\left(\sqrt[p']{q}\right)^{k'pp'}, \text{ или } q^{kp'}=q^{k'p};$$

а изъ этого послѣдняго равенства, очевидно, вытекаетъ слѣдующее:

$$kp' = k'p, \text{ или } \frac{k}{p} = \frac{k'}{p'}.$$

Итакъ, *если можно ввести какое-нибудь число двумя различными способами въ геометрическую прогрессію, то для него найдется каждый разъ одинъ и тотъ же логариѳмъ.*

§ 353. Теорема.— *Если одни логариѳмы вычислить, вставляя между послѣдовательными членами обѣихъ прогрессій нѣкоторое число среднихъ (геометрическихъ и ариѳметическихъ), а другіе—вставляя другое число среднихъ, то можно и тѣ и другіе логариѳмы считать принадлежащими къ одной и той же системѣ.*

Чтобы доказать это, замѣтимъ, что если между послѣдовательными членами геометрической прогрессіи вставимъ сначала $(p-1)$, а потомъ $(p'-1)$ среднихъ геометрическихъ, то всѣ полученные члены, и въ томъ и въ другомъ случаѣ, будутъ членами одной и той же единственной прогрессіи, которую получимъ, вставляя $(pp'-1)$ среднихъ геометрическихъ. Въ самомъ дѣлѣ, вставляя $(pp'-1)$ среднихъ геометрическихъ между двумя послѣдовательными членами a и b нѣкоторой прогрессіи, мы передвигаемъ членъ b на $(pp'+1)$-ое мѣсто. Поэтому, если мы возьмемъ въ послѣдней полученной прогрессіи только тѣ члены, начиная со 2-го, которые стоятъ на p'-мъ мѣстѣ одинъ послѣ другого, т.-е. $(p'+1)$-ый, $(2p'+1)$-ый, $(3p'+1)$-ый, ..., то b окажется p-ымъ членомъ этого ряда. Обозначая знаменатель послѣдней прогрессіи черезъ q, мы найдемъ, что члены, отобранные такимъ образомъ, соотвѣтственно равны $aq^{p'}$, $aq^{2p'}$, $aq^{3p'}$, ..., т.-е. что послѣдній рядъ есть также прогрессія и что эти члены можно разсматривать, какъ $(p-1)$ среднихъ геометрическихъ между a и b. Точно такъ же, отбирая члены, стоящіе на p-омъ мѣстѣ одинъ послѣ другого, начиная со 2-го, увидимъ, что b будетъ стоять на p'-омъ мѣстѣ въ этомъ новомъ ряду, и что всѣ отобранные члены можно разсматривать, какъ $(p'-1)$ среднихъ геометрическихъ между a и b.

То же самое замѣчаніе относится и къ ариѳметической прогрессіи; такимъ образомъ мы видимъ, что двѣ системы, которыя мы получимъ, вставляя отдѣльно $(p-1)$ и $(p'-1)$ среднихъ (геометрическихъ и ариѳметическихъ), составляютъ всего одну систему, соотвѣтствующую $(pp'-1)$ среднимъ (геометрическимъ и ариѳметическимъ).

Напр., пусть a и b обозначають два какихъ-нибудь послѣдовательныхъ члена геометрической или ариѳметической прогрессіи; вставимъ между a и b сначала три среднихъ, а затѣмъ пять, такъ что образуются прогрессія:

$$a,\ A_1,\ A_2,\ A_3,\ b,$$

$$a, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, b.$$

Если теперь мы вставимъ $(4.6 - 1) = 23$ среднихъ, то получимъ новую прогрессію, въ которой A_1, A_2, A_3 будутъ соотвѣтственно 7-мъ, 13-мъ, 19-мъ, а B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 — соотвѣтственно 5-мъ, 9-мъ, 13-мъ, 17-мъ, 21-мъ членами.

§ 354. Теорема.—*Между послѣдовательными членами геометрической прогрессіи можно вставить достаточно большое число среднихъ геометрическихъ, чтобы два какихъ-угодно послѣдовательныхъ члена новой прогрессіи отличались другъ отъ друга на сколь-угодно малую величину.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть q будетъ знаменатель, а A и Aq два какихъ-нибудь послѣдовательныхъ члена данной прогрессіи. Если между этими двумя членами вставимъ $(m - 1)$ среднихъ геометрическихъ, то знаменатель новой прогрессіи будетъ $\sqrt[m]{q}$; поэтому, два послѣдовательные члена этой прогрессіи, взятые между A и Aq, будутъ $A\left(\sqrt[m]{q}\right)^k$ и $A\left(\sqrt[m]{q}\right)^{k+1}$, а разность ихъ:

$$A\left(\sqrt[m]{q}\right)^{k+1} - A\left(\sqrt[m]{q}\right)^k, \text{ или } A\left(\sqrt[m]{q}\right)^k\left(\sqrt[m]{q} - 1\right).$$

Такъ какъ k меньше m, то $\left(\sqrt[m]{q}\right)^k$ меньше q; слѣдовательно, разность меньше

$$Aq\left(\sqrt[m]{q} - 1\right).$$

Но, когда m безпредѣльно возрастаетъ, $\sqrt[m]{q} - 1$ стремится къ нулю. Дѣйствительно, доказать, что при достаточно большомъ m

$$\sqrt[m]{q} - 1 < \varepsilon,$$

какъ бы ни было мало ε, равносильно тому, чтобы доказать неравенство

$$\sqrt[m]{q} < 1 + \varepsilon, \quad \text{или} \quad q < (1 + \varepsilon)^m.$$

Это же последнее неравенство очевидно, такъ какъ мы знаемъ (**§ 339**), что степени числа бо́льшаго 1 безпредѣльно возрастаютъ вмѣстѣ съ ихъ показателемъ.

Итакъ, множитель $\left(\sqrt[m]{q}-1\right)$ стремится къ нулю, а множитель Aq остается постояннымъ; слѣдовательно, и произведеніе $Aq\left(\sqrt[m]{q}-1\right)$ можетъ сдѣлаться сколько-угодно малымъ, если придадимъ m достаточно большое значеніе; отсюда заключаемъ, что разсматриваемая разность и подавно (*à fortiori*) можетъ быть сдѣлана сколь-угодно малою.

§ 355. Замѣчаніе.—Изъ теоремы **§ 354**-го вытекаетъ, что числа, логариѳмы которыхъ опредѣлены въ предыдущихъ параграфахъ, идутъ въ возрастающемъ порядкѣ, при чемъ разность между ними можетъ быть сдѣлана сколь-угодно малою. Однако, если ограничиться этимъ опредѣленіемъ, то мы должны будемъ считать безчисленное количество чиселъ не имѣющими логариѳмовъ. Извѣстно, напр. (**§ 344**), что каково бы ни было число среднихъ геометрическихъ, вставленныхъ между членами геометрической прогрессіи:

$$\because 1:10:100:1000:\ldots,$$

ни одинъ изъ нихъ не будетъ соизмѣримымъ числомъ. Напротивъ, всѣ соизмѣримыя числа могутъ быть вставлены, какъ средніе ариѳметическіе, въ ариѳметическую прогрессію:

$$\div 1.2.3.4.5\ldots$$

Слѣдовательно, въ системѣ логариѳмовъ, опредѣляемой этими двумя прогрессіями, *соизмѣримыя не цѣлыя числа представляютъ логариѳмы несоизмѣримыхъ чиселъ, а соизмѣримыя числа, не представляющія степеней* 10, *должны быть разсматриваемы, какъ не имѣющія логариѳмовъ, потому что они не могутъ быть членами геометрической прогрессіи.*

§ 356. Опредѣленіе логариѳмовъ чиселъ, которыя не могутъ быть членами геометрической прогрессіи. — Когда число не можетъ быть введено въ геометрическую прогрессію, то его логариѳмъ, который не можетъ быть соизмѣримымъ числомъ (**§ 355**), опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

Логариѳмъ числа N, которое не можетъ быть членомъ геометрической прогрессіи, больше соизмѣримыхъ чиселъ, служащихъ логариѳмами чиселъ меньшихъ N, и меньше соизмѣримыхъ чиселъ, служащихъ логариѳмами чиселъ большихъ N.

Напр., въ системѣ, опредѣляемой прогрессіями **§ 355**-го, число 37 не можетъ быть членомъ геометрической прогрессіи. Чтобы опредѣлить его логариѳмъ, согласимся вставить между 10 и 100 значительное число среднихъ геометрическихъ, а между 1 и 2 то же число среднихъ ариѳметическихъ; тогда мы въ геометрической прогрессіи найдемъ два послѣдовательныхъ члена, между которыми находится 37 и соизмѣримые логариѳмы которыхъ, весьма мало отличаясь другъ отъ друга, по опредѣленію, будутъ заключать логариѳмъ 37. Значеніе этого логариѳма будетъ притомъ вполнѣ опредѣленное: онъ будетъ общимъ предѣломъ, къ которому будутъ стремиться логариѳмы обоихъ чиселъ, каждый разъ заключающихъ 37, когда число вставляемыхъ среднихъ безпредѣльно возрастаетъ.

§ 357. Теорема.—Изъ всего предыдущаго вытекаетъ, что *всякое число, большее* 1, *имѣетъ логариѳмъ.*

II. Обобщенія, распространенныя на несоизмѣримыя числа

§ 358. Общее опредѣленіе несоизмѣримыхъ чиселъ.—Мы только-что опредѣлили (**§ 356**) логариѳмъ числа, указывая, каковы тѣ соизмѣримыя числа, которыя больше его, и каковы тѣ, которыя меньше его. Этотъ способъ и употребляется обыкновенно для опредѣленія несоизмѣримыхъ чиселъ. Не безполезно будетъ дать нѣсколько разъясненій по этому поводу.

Существуютъ величины, не имѣющія общей мѣры. Извѣстно, напр., что діагональ квадрата несоизмѣрима съ его стороною; то же надо сказать о діагонали и ребрѣ куба. Въ этомъ случаѣ отношеніе двухъ величинъ не можетъ быть выражено никакимъ цѣлымъ или дробнымъ числомъ: говорятъ, что это отношеніе несоизмѣримо.

Для опредѣленія несоизмѣримаго числа можно только указать, какъ можетъ составиться изъ единицы выражаемая имъ величина. Пусть, напр., требуется опредѣлить несоизмѣримое число $\sqrt{2}$, представляющее *вполнѣ опредѣленную величину*, именно, длину діагонали квадрата, сторона котораго равна единицѣ. Говорятъ, что нѣкоторое число больше или меньше $\sqrt{2}$, смотря по тому, будетъ ли его квадратъ больше или меньше 2. Положивъ это и выбравъ

нѣкоторую единицу длины, разсматриваютъ всѣ числа, какъ выражающія длины, откладываемыя на одной и той же прямой, отъ какого-нибудь общаго начала, въ одномъ и томъ же направленіи. Одна часть этой линіи будетъ содержать точки, которыми оканчиваются длины, измѣряемыя числами, меньшими, чѣмъ $\sqrt{2}$; другая же—тѣ точки, которыми оканчиваются длины, измѣряемыя числами, большими, чѣмъ $\sqrt{2}$. Между двумя этими частями не можетъ существовать промежутка конечной длины, такъ какъ числа одного ряда отличаются на сколь-угодно малую величину отъ чиселъ другого ряда. Слѣдовательно, между ними будетъ только одна *демаркаціонная точка*, или *точка разграниченія* (point de démarcation), и разстояніе этой точки отъ начала, по опредѣленію, измѣряется числомъ $\sqrt{2}$.

Мы ограничились опредѣленіемъ величины, мѣра которой есть $\sqrt{2}$. Да и на самомъ дѣлѣ, нѣтъ возможности опредѣлить прямо отвлеченное число. Размышляя надъ данными опредѣленіями, мы увидимъ, что даже въ простыхъ случаяхъ, когда разсматриваются цѣлыя и дробныя числа, эти опредѣленія суть только указаніе дѣйствія, при помощи котораго получается изъ единицы величина, измѣряемая этими числами.

§ 359. Сложеніе и вычитаніе.—Сложить или вычесть несоизмѣримыя числа значитъ найти число, выражающее сумму или разность величинъ, измѣряемыхъ данными числами.

§ 360. Умноженіе.—Если множитель соизмѣримое число, то измѣнять опредѣленіе умноженія не приходится. Такъ, напр., умножить $\sqrt{2}$ на 7 значитъ найти число, выражающее величину въ 7 разъ большую той, которая выражается числомъ $\sqrt{2}$. Умножить $\sqrt{2}$ на $\frac{3}{4}$ значитъ найти число, выражающее величину, равную $\frac{3}{4}$ той, которая измѣряется числомъ $\sqrt{2}$.

Если же множитель—несоизмѣримое число, то надо дать новое опредѣленіе. Мы назовемъ произведеніемъ числа A на несоизмѣримое число B такое число, которое меньше произведенія A на какое-угодно соизмѣримое число, бо́льшее B, и больше произведенія A на какое-угодно соизмѣримое число, меньшее B.

§ 361. Дѣленіе.—Раздѣлить число A на число B значитъ найти такое третье число, которое, будучи умножено на дѣлитель B, дастъ

дѣлимое A. Это опредѣленіе можетъ быть принято во всѣхъ случаяхъ, каковы бы ни были числа A и B, соизмѣримыя или несоизмѣримыя.

§ 362. Корни.—Корнемъ m-ой степени изъ несоизмѣримаго числа называется число, которое, будучи взято m разъ множителемъ, дастъ произведеніе, равное данному числу.

Мы видимъ, что единственное дѣйствіе, которое требуетъ вполнѣ новаго опредѣленія, есть умноженіе; всѣ остальныя опредѣленія связаны съ нимъ.

§ 363. Теорема.—*Всегда можно найти два такихъ соизмѣримыхъ числа, заключающихъ данное несоизмѣримое число, разность между которыми будетъ сколь-угодно мала.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть n какое-нибудь цѣлое число; разсматривая рядъ

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \frac{5}{n}, \ldots,$$

мы увидимъ, что члены его увеличиваются безпредѣльно; и такъ какъ они начинаются съ нуля, то данное несоизмѣримое число, каково бы оно ни было, необходимо заключается между двумя изъ чиселъ ряда, $\frac{x}{n}$ и $\frac{x+1}{n}$, при чемъ n можно взять настолько большимъ, что ихъ разность, равная $\frac{1}{n}$, будетъ сколь-угодно мала.

§ 364. Распространеніе теоремъ, доказанныхъ для соизмѣримыхъ чиселъ, на случай несоизмѣримыхъ чиселъ.—Предыдущая теорема, очевидно, даетъ возможность распространить на несоизмѣримыя числа слѣдующія теоремы, доказанныя для соизмѣримыхъ чиселъ.

1. *Въ произведеніи изъ нѣсколькихъ множителей можно измѣнить порядокъ множителей.*

2. *Чтобы умножить число на произведеніе изъ нѣсколькихъ множителей, можно умножить его послѣдовательно на отдѣльные множители.*

3. *Чтобы умножить произведеніе на какое-нибудь число, достаточно умножить одинъ изъ его множителей на это число.*

4. *Чтобы умножить одно произведеніе на другое, достаточно составить всего одно произведеніе изъ множителей множимаго и множителя.*

5. *Чтобы перемножить двѣ степени одного и того же числа, достаточно сложить показателей.*

III. Свойства логариѳмовъ

§ 365. Теорема I.—*Логариѳмъ произведенія двухъ множителей равенъ суммѣ логариѳмовъ множителей.*

Пусть будутъ даны двѣ прогрессіи:

$$\left.\begin{array}{l} \div\ 1 : q : q^2 : q^3 : \ldots : q^m : \ldots : q^n : \ldots, \\ \because\ 0 . r . 2r . 3r . \ldots . mr . \ldots . nr . \ldots, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

опредѣляющія систему логариѳмовъ. Члены первой представляютъ послѣдовательныя степени знаменателя прогрессіи q, а члены второй—послѣдовательныя кратныя относительно разности прогрессіи r.

Если умножимъ другъ на друга два члена геометрической прогрессіи, q^m и q^n, то получимъ произведеніе q^{m+n}, которое, очевидно, представитъ $(m+n+1)$-ый членъ той же прогрессіи; если же сложимъ логариѳмы q^m и q^n, т.-е. mr и nr, то получимъ сумму $(m+n)r$, которая, очевидно, будетъ $(m+n+1)$-мъ членомъ ариѳметической прогрессіи и, слѣдовательно, логариѳмомъ q^{m+n}; такимъ образомъ, теорема доказана.

§ 366. Обобщеніе. — Предыдущее доказательство предполагаетъ, что разсматриваемыя числа — члены одной и той же кратной прогрессіи; оно не относится къ несоизмѣримымъ логариѳмамъ (**§ 356**). Чтобы доказать справедливость теоремы и для этого случая, замѣтимъ, что если даны два какихъ-угодно числа N и N', то всегда можно вставить въ обѣ прогрессіи столько среднихъ, что члены будутъ увеличиваться, весьма мало измѣняясь, и что, слѣдовательно, въ нихъ найдется два члена N_1 и N_1', отличающіеся сколь-угодно мало отъ N и N'. Съ другой же стороны, мы будемъ имѣть (**§ 365**):

$$\log(N_1 \times N_1') = \log N_1 + \log N_1'.$$

Первая часть этого равенства отличается сколь-угодно мало отъ $\log(N \times N')$, а второй—также сколь-угодно мало отъ $\log N + \log N'$; слѣдовательно, невозможно, чтобы $\log(N \times N')$ и $\log N + \log N'$ имѣли какую-нибудь опредѣленную разность, и потому эти два количества равны между собою, что и требовалось доказать.

§ 367. Распространеніе на случай болѣе двухъ множителей.—*Предыдущая теорема распространяется на случай какого-угодно числа множителей.* Пусть, напр., дано произведеніе изъ четырехъ множителей $abcd$; очевидно, что

$$\log(abcd) = \log(abc \times d) = \log(abc) + \log d$$
$$= \log(ab) + \log c + \log d = \log a + \log b + \log c + \log d. \qquad (1)$$

§ 368. Теорема II.—*Логариѳмъ цѣлой и положительной степени какого-нибудь числа равенъ произведенію логариѳма числа на показателя степени.*

Эта теорема есть слѣдствіе предыдущей. Пусть, въ самомъ дѣлѣ, a^4 данная степень; имѣемъ:

$$\log a^4 = \log(a \times a \times a \times a) = \log a + \log a + \log a + \log a = 4\log a.$$

Доказательство, очевидно, остается одно и то же, каковъ бы ни былъ цѣлый и положительный показатель.

Такимъ образомъ,

$$\log a^m = m \log a. \qquad (2)$$

§ 369. Теорема III. — *Логариѳмъ частнаго равенъ логариѳму дѣлимаго безъ логариѳма дѣлителя.*

Пусть дано частное $\frac{a}{b}$, которое обозначимъ черезъ q; мы будемъ имѣть:

$$a = bq,$$

и, значитъ,

$$\log a = \log b + \log q,$$

откуда

$$\log q = \log a - \log b, \text{ или } \log \frac{a}{b} = \log a - \log b. \qquad (3)$$

Замѣчаніе.—Въ предыдущей теоремѣ предполагается, что частное $\frac{a}{b}$ больше 1, такъ какъ до сихъ поръ были опредѣлены логариѳмы только чиселъ, бóльшихъ 1.

§ 370. Теорема IV.—*Логариѳмъ корня изъ числа равенъ логариѳму числа, раздѣленному на показателя корня.*

Пусть данъ корень $\sqrt[m]{a}$, который мы обозначимъ черезъ r; по опредѣленію имѣемъ:

$$a = r^m.$$

откуда заключаемъ (**§ 368**), что

$$\log a = m \log x,$$

и, слѣдовательно,

$$\log x = \frac{\log a}{m}, \text{ или } \log \sqrt[m]{a} = \frac{\log a}{m}. \qquad (4)$$

§ 371. Замѣчаніе. — Четыре предыдущія теоремы показываютъ, что *умноженіе* нѣсколькихъ чиселъ можетъ быть замѣнено *сложеніемъ* ихъ логариѳмовъ; *дѣленіе* — *вычитаніемъ* двухъ логариѳмовъ; *возвышеніе въ степень* — *умноженіемъ* логариѳма числа на показателя степени и, наконецъ, *извлеченіе корня* — *дѣленіемъ* логариѳма числа на показателя корня.

Но чтобы пользоваться этими упрощеніями, надо имѣть таблицу логариѳмовъ и умѣть находить по ней какъ логариѳмъ даннаго числа, такъ и, наоборотъ, число, соотвѣтствующее данному логариѳму.

IV. Устройство и расположеніе логариѳмическихъ таблицъ

§ 372. Обыкновенные логариѳмы. — При числовыхъ вычисленіяхъ употребляютъ исключительно логариѳмы, опредѣляемые такими двумя прогрессіями:

$$\because 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : \ldots,$$

$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,\ldots$$

Въ этой системѣ *логариѳмъ степени* 10 *равенъ ея показателю*. Дѣйствительно, при $\log 10 = 1$ мы можемъ написать:

$$\log 10^m = m \log 10 = m.$$

Логариѳмы всѣхъ другихъ чиселъ, цѣлыхъ или дробныхъ, несоизмѣримы (**§ 355**).

§ 373. Характеристика. — *Характеристикою* логариѳма числа называется цѣлая часть этого логариѳма. Числа, взятыя между 1 и 10, т.-е. такія числа, цѣлая часть которыхъ есть однозначное число, имѣютъ логариѳмами числа, заключающіяся между 0 и 1; характеристика равна нулю. Числа, взятыя между 10 и 100, т.-е. такія, цѣлая часть которыхъ — двузначное число, имѣютъ логариѳмами числа, заключенныя между 1 и 2; характеристика равна 1. Во-

обще, цѣлая часть чиселъ, взятыхъ между 10^{n-1} и 10^n, состоитъ изъ n цифръ, а ихъ логариѳмы, будучи заключены между $(n-1)$ и n, имѣютъ характеристику $(n-1)$.

Итакъ, *характеристика логариѳма числа содержитъ столько единицъ, сколько цифръ безъ одной въ цѣлой части этого числа.*

§ 374. Теорема.—*При умноженіи или дѣленіи числа на степень* 10, *часть его логариѳма, стоящая послѣ запятой, не измѣняется, а характеристика увеличивается или уменьшается на столько единицъ, сколько ихъ въ показателѣ степени* 10.

Въ самомъ дѣлѣ (**§§ 365 и 368**),

$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n,$$

и (**§ 369**)

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

§ 375. Устройство таблицъ. — Вычисляютъ и помѣщаютъ въ таблицы логариѳмы только цѣлыхъ чиселъ. Такъ какъ всѣ эти логариѳмы несоизмѣримы (**§ 355**), то ихъ можно вычислить лишь съ извѣстнымъ приближеніемъ; обыкновенно ограничиваются первыми семью или восемью знаками послѣ запятой.

Данное нами опредѣленіе (**§ 356**) приводитъ къ приближенному значенію логариѳма числа. Дѣйствительно, вставляя въ прогрессіи достаточное число среднихъ (геометрическихъ и ариѳметическихъ), мы въ геометрической прогрессіи всегда можемъ найти два послѣдовательныхъ члена, между которыми будетъ заключаться данное число: логариѳмы ихъ будутъ приближенными значеніями его логариѳма.

Но такой способъ вычисленія былъ бы очень длиненъ и утомителенъ; мы покажемъ на одномъ примѣрѣ, сколько при этомъ потребовалось бы дѣйствій. Кстати замѣтимъ, что вторая часть алгебры даетъ для вычисленія логариѳмовъ несравненно болѣе быстрые методы.

Примѣръ.—*Найти логариѳмъ числа* 1855.

Такъ какъ 1855 заключается между 1000 и 10000, то его логариѳмъ заключается между 3 и 4. Если между членами 1000 и 10000 кратной прогрессіи мы вставимъ средній геометрическій, а между членами 3 и 4 разностной прогрессіи—средній ариѳметическій, то найдемъ

$$a = \sqrt{1000 \,.\, 10000} = 3162,27766$$

для значенія перваго и 3,5 для значенія второго, такъ что

$$3{,}5 = \log a = \log 3162{,}27766.$$

Такъ какъ 1855 *заключается между* 1000 и a, то его логариѳмъ заключается между 3 и 3,5. Если теперь мы вставимъ средній геометрическій между 1000 и a въ кратной прогрессіи и средній ариѳметическій между 3 и 3,5 въ разностной прогрессіи, то для перваго найдемъ

$$b = \sqrt{1000a} = 1778{,}2794,$$

а для второго

$$\frac{3+3{,}5}{2}, \text{ или } 3{,}25,$$

[redacted]

$$3{,}25 = \log b = \log 1778{,}2794.$$

Но 1855 *заключается между* a и b; слѣдовательно, его логариѳмъ заключается между 3,25 и 3,5. Если мы вставимъ два новыхъ среднихъ (геометрическій и ариѳметическій), то, обозначая первый черезъ c, найдемъ:

$$3{,}375 = \log\sqrt{ab} = \log 2371{,}3737 = \log c.$$

Также, замѣчая, что 1855 *заключается между* b и c, видимъ, что его логариѳмъ заключается между 3,25 и 3,375. Новое вычисленіе даетъ.

$$3{,}3125 = \log\sqrt{bc} = \log 2053{,}5250 = \log d.$$

Продолжая въ этомъ родѣ вычисленія, составляемъ слѣдующую таблицу:

$$3{,}5 = \log a = \log 3162{,}27766$$
$$3{,}25 = \log\sqrt{1000a} = \log b = \log 1778{,}2794$$
$$3{,}375 = \log\sqrt{ab} = \log c = \log 2371{,}3737$$
$$3{,}3125 = \log\sqrt{bc} = \log d = \log 2053{,}5250$$
$$3{,}28125 = \log\sqrt{bd} = \log e = \log 1910{,}95294$$
$$3{,}265625 = \log\sqrt{be} = \log f = \log 1843{,}42296$$
$$3{,}2734375 = \log\sqrt{ef} = \log g = \log 1876{,}8843$$
$$3{,}26953125 = \log\sqrt{fg} = \log h = \log 1860{,}0784$$
$$3{,}26757812 = \log\sqrt{fh} = \log i = \log 1851{,}7321$$
$$3{,}26855469 = \log\sqrt{hi} = \log k = \log 1855{,}9005$$
$$3{,}26806641 = \log\sqrt{ik} = \log l = \log 1853{,}8151$$
$$3{,}26831055 = \log\sqrt{kl} = \log m = \log 1854{,}8575$$
$$3{,}26843262 = \log\sqrt{km} = \log n = \log 1855{,}3789.$$

Сравнивая съ одной стороны n и m, а съ другой k и m, получаемъ:

$$n = 1855,3789, \qquad k = 1855,9005,$$
$$m = 1854,8575, \qquad m = 1854,8575,$$

откуда $$n - m = 0,5214, \qquad k - m = 1,0430,$$

а это показываетъ, что разность $(n-m)$ равна почти половинѣ $(k-m)$.

Сравнивая въ то же время съ одной стороны $\log n$ и $\log m$, съ другой $\log k$ и $\log m$, имѣемъ:

$$\log n = 3,26843262, \qquad \log k = 3,26855469,$$
$$\log m = 3,26831055, \qquad \log m = 3,26831055,$$

откуда $$\log n - \log m = 0,00012207, \quad \log k - \log m = 0,00024414,$$

а это показываетъ, что $(\log n - \log m)$ равенъ половинѣ $(\log k - \log m)$. Такимъ образомъ, разности между числами относятся другъ къ другу, какъ разности между ихъ логариѳмами. Допуская эту пропорцію для такихъ близкихъ между собою чиселъ, мы непосредственно получимъ $\log 1855$. Въ самомъ дѣлѣ, мы можемъ спросить: если разность между n и m равна 0,5214 и разность между ихъ логариѳмами равна 12207 единицамъ восьмого порядка (послѣ запятой), то какова будетъ при разности между числами 1855 и 1854,8575, равной 0,1425, разность x между ихъ логариѳмами? и сейчасъ же найдемъ:

$$x = \frac{12207 \times 1425}{5214} = 3336 \text{ единицамъ 8-го порядка.}$$

Прибавляя это число къ логариѳму m, получимъ

$$\log 1855 = 3,26834391.$$

§ 376. Расположеніе логариѳмическихъ таблицъ Каллета.—Первая таблица очень проста: она содержитъ цѣлыя числа отъ 1 до 1200, расположенныя послѣдовательно въ нѣсколько столбцовъ, надъ которыми поставлена начальная буква N слова *nombre* (число); сбоку и справа отъ этихъ столбцовъ помѣщены другіе, надъ которыми надписано Log., начало слова *logarithme* (логариѳмъ), и эти вторые столбцы такъ размѣщены, что за каждымъ столбцомъ чиселъ непосредственно слѣдуетъ столбецъ логариѳмовъ и каждый логариѳмъ стоитъ справа отъ числа, которому онъ принадлежитъ, на одной линіи съ этимъ числомъ. Характеристики логариѳмовъ не помѣщены, такъ какъ онѣ легко опредѣляются по одному взгляду на число (§ 373). Каждый логариѳмъ данъ съ восемью десятичными знаками.

Эта таблица называется *Chiliade* I (хиліадою), потому что она, дѣйствительно, содержитъ логариѳмы первой тысячи (*Chiliade*—французская передѣлка греческаго слова, означающаго собраніе тысячи единицъ).

Слѣдующія таблицы немного сложнѣе: онѣ идутъ отъ 1020 до 108000. Первый слѣва столбецъ, надъ которымъ стоитъ N, содержитъ цѣлыя числа отъ 1020 до 10800. Слѣдующій столбецъ, надъ которымъ стоитъ 0, даетъ мантиссы *) логариѳмовъ этихъ чиселъ, такъ что вмѣстѣ эти два столбца составляютъ продолженіе первой таблицы и непосредственно даютъ логариѳмы чиселъ отъ 1020 до 10800. Каждый изъ этихъ логариѳмовъ имѣетъ только семь цифръ послѣ запятой.

Обращая вниманіе на столбецъ, надъ которымъ стоитъ N, мы замѣтимъ, что составляющія его числа выписаны не сполна; помѣщены только двѣ послѣднія цифры каждаго изъ нихъ, считая отъ лѣвой руки къ правой, остальныя же цифры мы встрѣчаемъ черезъ каждыя четыре строки. Но при чтеніи ихъ легко возстановить.

Разсматривая столбецъ, надъ которымъ стоитъ 0, мы видимъ съ лѣвой стороны трехзначныя числа, стоящія отдѣльно; они идутъ, увеличиваясь постоянно на единицу, и находятся на неравномъ разстояніи другъ отъ друга. На правой сторонѣ того же столбца помѣщены подрядъ числа, каждое изъ четырехъ цифръ, такъ что нѣкоторые логариѳмы какъ-будто имѣютъ только четыре цифры, а нѣкоторые всѣ семь.

На самомъ дѣлѣ, подъ *каждымъ* такимъ отдѣльно стоящимъ числомъ и въ то же время противъ каждаго изъ четырехзначныхъ, находящихся въ томъ же столбцѣ, слѣдуетъ подразумѣвать написаннымъ это отдѣльно стоящее число, и при томъ столько разъ, чтобы всѣ строчки до слѣдующаго отдѣльно стоящаго числа были заполнены. Въ такомъ случаѣ, если мы найдемъ противъ какого-нибудь числа только четыре цифры въ столбцѣ, надъ которымъ стоитъ 0, то къ нимъ съ лѣвой стороны необходимо приписать ближайшее изъ такихъ стоящихъ выше, трехзначныхъ чиселъ. За 10000 отдѣльно стоящія числа имѣютъ по четыре цифры, а логариѳмы по восьми цифръ послѣ запятой.

Когда одно число въ 10 разъ больше другого, то разность между ихъ логариѳмами равна логариѳму 10, т.-е. 1, и слѣдовательно, часть логариѳма послѣ запятой у нихъ будетъ общая (§ 374). Поэтому, совокупность двухъ первыхъ столбцовъ, о которыхъ мы только-что говорили, даетъ также логариѳмы чиселъ, черезъ каждыя десять, отъ 10200 до 108000. Для нахожденія логариѳмовъ

*) *Мантиссою* логариѳма называется часть, стоящая послѣ запятой. *Прим. перев.*

промежуточныхъ чиселъ, прибѣгаемъ къ помощи столбцовъ, помѣченныхъ цифрами 1, 2, 3, 4, и т. д. Эти столбцы содержатъ по четыре послѣднихъ десятичныхъ знака послѣ запятой логариѳмовъ чиселъ, оканчивающихся цифрами, стоящими вверху надъ соотвѣтственными столбцами. Такъ, столбецъ, помѣченный 0, содержитъ по четыре послѣднихъ десятичныхъ знака послѣ запятой логариѳмовъ чиселъ, взятыхъ между 10200 и 108000 и оканчивающихся нулемъ, и кромѣ того онъ содержитъ отдѣльныя числа, о которыхъ мы говорили и которыя должны быть приписаны слѣва къ цифрамъ, находящимся въ другихъ столбцахъ. Столбецъ, помѣченный цифрою 1, содержитъ четыре послѣднихъ десятичныхъ знака послѣ запятой логариѳмовъ всѣхъ чиселъ, оканчивающихся на 1; столбецъ, помѣченный цифрою 2, — логариѳмовъ всѣхъ чиселъ, оканчивающихся на 2, столбецъ, помѣченный цифрою 3,—логариѳмовъ всѣхъ чиселъ, оканчивающихся на 3, и т. д. до 9. Такимъ образомъ, мы имѣемъ таблицу съ числами двухъ родовъ; въ ней мы сначала смотримъ на первый столбецъ, помѣченный буквою N и, найдя въ немъ первыхъ четыре цифры числа, логариѳмъ котораго ищемъ, слѣдуемъ взглядомъ по горизонтальной строкѣ, пока не дойдемъ до столбца, надъ которымъ находится пятая цифра даннаго числа; тогда мы будемъ имѣть четыре послѣднихъ десятичныхъ знака послѣ запятой искомаго логариѳма, первые же три знака будутъ выражены числомъ, отдѣльно стоящимъ во второмъ столбцѣ и ближайшимъ по направленію вверхъ.

Послѣдній столбецъ содержитъ разности логариѳмовъ двухъ послѣдовательныхъ пятизначныхъ чиселъ и части этихъ разностей, т.-е. произведенія ихъ на $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$, и т. д. до $\frac{9}{10}$. Эти произведенія составляютъ столько табличекъ, сколько разностей. Каждая изъ этихъ табличекъ помѣщена непосредственно подъ той разностью, части которой она выражаетъ, и раздѣлена вертикальною чертою на два столбца: лѣвый, показывающій число десятыхъ долей отъ 1 до 9, и правый, заключающій соотвѣтственныя части; далѣе мы увидимъ, какъ пользоваться этими табличками.

Но такъ какъ въ началѣ таблицъ очень много этихъ разностей, и, слѣдовательно, онѣ находятся очень близко одна отъ другой, то нельзя было бы помѣстить въ промежуткѣ между ними табличекъ пропорціональныхъ частей, если бы разности занимали только одинъ столбецъ. Поэтому, ихъ въ началѣ расположили въ два

N		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7680	885	3612	3669	3725	3781	3838	3895	3951	4008	4065	4121
81		4178	4234	4291	4347	4404	4460	4517	4573	4630	4686
82		4743	4800	4856	4913	4969	5026	5082	5139	5195	5252
83		5308	5365	5421	5478	5534	5591	5647	5704	5761	5817
84		5874	5930	5987	6043	6100	6156	6213	6269	6326	6382
7685		6439	6495	6552	6608	6665	6721	6778	6834	6891	6947
86		7004	7060	7117	7173	7230	7286	7343	7399	7456	7512
87		7569	7625	7682	7738	7795	7851	7908	7964	8021	8077
88		8134	8190	8247	8303	8360	8416	8473	8529	8586	8642
89		8699	8755	8812	8868	8925	8981	9037	9094	9150	9207
7690		9263	9320	9376	9433	9489	9546	9602	9659	9715	9772
91		9828	9885	9941	9998						
	886.					0054	0110	0167	0223	0280	0336
92		0393	0449	0506	0562	0619	0675	0732	0788	0844	0901
93		0957	1014	1070	1127	1183	1240	1296	1352	1409	1465
94		1522	1578	1635	1691	1748	1804	1860	1917	1973	2030
7695		2086	2143	2199	2256	2312	2368	2425	2481	2538	2594
96		2651	2707	2763	2820	2876	2933	2989	3046	3102	3158
97		3215	3271	3328	3384	3441	3497	3553	3610	3666	3723
98		3779	3835	3892	3948	4005	4061	4118	4174	4230	4287
99		4343	4400	4456	4512	4569	4625	4682	4738	4794	4851
7700		4907	4964	5020	5076	5133	5189	5246	5302	5358	5415
01		5471	5528	5584	5640	5697	5753	5810	5866	5922	5979
02		6035	6092	6148	6204	6261	6317	6373	6430	6486	6543
03		6599	6655	6712	6768	6824	6881	6937	6994	7050	7106
04		7163	7219	7275	7332	7388	7445	7501	7557	7614	7670
7705		7726	7783	7839	7896	7952	8008	8065	8121	8177	8234
06		8290	8346	8403	8459	8515	8572	8628	8685	8741	8797
07		8854	8910	8966	9023	9079	9135	9192	9248	9304	9361
08		9417	9473	9530	9586	9642	9699	9755	9811	9868	9924
09		9980									
	887.		0037	0093	0149	0206	0262	0318	0375	0431	0487
7710		0544	0600	0656	0713	0769	0825	0882	0938	0994	1051
11		1107	1163	1220	1276	1332	1389	1445	1501	1558	1614
12		1670	1727	1783	1839	1895	1952	2008	2064	2121	2177
13		2233	2290	2346	2402	2459	2515	2571	2627	2684	2740
14		2796	2853	2909	2965	3022	3078	3134	3190	3247	3303
7715		3359	3416	3472	3528	3584	3641	3697	3753	3810	3866
16		3922	3978	4035	4091	4147	4204	4260	4316	4372	4429
17		4485	4541	4598	4654	4710	4766	4823	4879	4935	4991
18		5048	5104	5160	5217	5273	5329	5385	5442	5498	5554
19		5610	5667	5723	5779	5835	5892	5948	6004	6060	6117
7720		6173	6229	6286	6342	6398	6454	6511	6567	6623	6679
21		6736	6792	6848	6904	6961	7017	7073	7129	7185	7242
22		7298	7354	7410	7467	7523	7579	7635	7692	7748	7804
23		7860	7917	7973	8029	8085	8142	8198	8254	8310	8366
24		8423	8479	8535	8591	8648	8704	8760	8816	8872	8929
7725		8985	9041	9097	9154	9210	9266	9322	9378	9435	9491
26		9547	9603	9659	9716	9772	9828	9884	9941	9997	
	888.										0053
27		0109	0165	0222	0278	0334	0390	0446	0503	0559	0615
28		0671	0727	0784	0840	0896	0952	1008	1064	1121	1177
29		1233	1289	1345	1402	1458	1514	1570	1626	1683	1739
N.		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

DIFF	57
1	6
2	11
3	17
4	23
5	29
6	34
7	40
8	46
9	51

столбца: первая изъ этихъ разностей помѣщена въ первомъ столбцѣ, а двѣ слѣдующія—на той же горизонтальной линіи, гдѣ онѣ и должны находиться, но отодвинуты вправо и занимаютъ такимъ образомъ второй столбецъ; двѣ слѣдующія разности находятся въ первомъ столбцѣ, а двѣ другія, слѣдующія за этими,—во второмъ столбцѣ, и т. д. На первыхъ четырехъ страницахъ помѣщены таблицы частей этихъ разностей черезъ двѣ.

Чтобы эти объясненія были болѣе понятными, мы воспроизводимъ здѣсь одну изъ страницъ таблицы Каллета, за исключеніемъ двухъ столбцовъ, расположенныхъ влѣво отъ столбца N, такъ какъ послѣдніе не имѣютъ никакого отношенія къ теоріи логариѳмовъ.

V. Употребленіе логариѳмическихъ таблицъ

§ 377. Задача I.—*Найти по таблицамъ логариѳмъ даннаго числа.*

Данное число можетъ быть цѣлымъ и меньшимъ 108000, или же оно можетъ быть десятичною дробью, цифры которой, если не обращать вниманія на запятую, составляютъ число, меньшее 108000. Этотъ второй случай приводимъ къ первому, разсматривая сначала число, какъ цѣлое, а затѣмъ придавая найденной дробной части логариѳма надлежащую характеристику.

1-ый случай.—Если данное число меньше 1200, то мы его находимъ въ первой хиліадѣ между натуральными числами, помѣщенными въ столбцахъ подъ буквою N. Число, стоящее въ слѣдующемъ столбцѣ, помѣченномъ знакомъ Log., съ правой стороны отъ даннаго и въ одной съ нимъ строкѣ, представляетъ дробную часть его логариѳма; характеристика же всегда равна 0, 1, 2 или 3, смотря по тому, будетъ ли первая значущая цифра даннаго числа обозначать простыя единицы, десятки, сотни или тысячи.

2-ой случай.—Если данное число заключается между 1020 и 10800, то мы его находимъ въ таблицѣ, помѣщенной послѣ хиліады I, въ столбцѣ N, а затѣмъ смотримъ на слѣдующій столбецъ, помѣченный цифрою 0. Если на той строкѣ, гдѣ стоитъ данное число, мы находимъ семь цифръ, то это и будетъ дробная часть искомаго логариѳма. Если же тамъ стоятъ только четыре цифры, то онѣ будутъ четырьмя послѣдними цифрами дробной части логариѳма; затѣмъ смотримъ вверхъ по незаполненному съ лѣвой стороны пространству,

пока не встрѣтимъ тамъ числа, состоящаго изъ трехъ цифръ, которыя выразятъ три первыя цифры дробной части искомаго логариѳма. Приписавъ эти послѣднія слѣва къ раньше найденнымъ четыремъ цифрамъ, получимъ семизначное число, въ началѣ котораго ставимъ, наконецъ, надлежащую характеристику. Напр., сбоку 7680 на той же линіи, въ столбцѣ, помѣченномъ цифрою 0, находимъ 8853612, такъ что сразу получаемъ дробную часть искомаго логариѳма, остается только приписать характеристику 3. Если бы число было 7,680, характеристика была бы 0; она равнялась бы 1, если бы было дано 76,80; равнялась бы 2, если бы было дано 768,0. Сбоку 7695, въ столбцѣ, помѣченномъ цифрою 0, находимъ только 2086, поднимаясь же вверхъ, находимъ съ лѣвой стороны 886; слѣдовательно, искомый логариѳмъ есть 3,8862086. Такъ же точно нашли бы логариѳмъ пятизначнаго числа, меньшаго 10800.

3-ій случай.—Если число заключается между 10200 и 108000, то обыкновенно оно состоитъ изъ пяти значущихъ цифръ; на время не обращаемъ вниманія на послѣднюю цифру и ищемъ число, состоящее изъ первыхъ четырехъ цифръ. Затѣмъ смотримъ вдоль той строки, гдѣ оно стоитъ, отъ лѣвой руки къ правой, пока не дойдемъ до столбца, на верху котораго стоитъ отброшенная 5-ая цифра. Четыре цифры, стоящія противъ четырехъ первыхъ цифръ даннаго числа, въ столбцѣ, соотвѣтствующемъ пятой цифрѣ, будутъ четырьмя послѣдними цифрами дробной части логариѳма этого числа. Первыя же три цифры, какъ и раньше, мы найдемъ, поднимаясь вверхъ по столбцу, помѣченному цифрою 0. Пусть, напр., требуется найти логариѳмъ 772,37; въ столбцѣ N находимъ число 7723; въ строкѣ, гдѣ оно стоитъ, и въ столбцѣ, помѣченномъ цифрою 0, непосредственно справа отъ него ничего нѣтъ, но немного повыше встрѣчаемъ 887; затѣмъ смотримъ вдоль строки, гдѣ стоитъ 7723, пока не встрѣчаемъ столбца, помѣченнаго цифрою 7, и находимъ тамъ 8254. Слѣдовательно, дробная часть искомаго логариѳма есть 0,8878254, а самый логариѳмъ 2,8878254. Точно такъ же мы нашли бы логариѳмъ числа, содержащагося между 102000 и 108000.

§ 378. Случай, когда данное число не находится въ таблицахъ.— Только-что приведенныя подробныя объясненія помогаютъ найти логариѳмъ цѣлаго числа, меньшаго 108000, и логариѳмъ десятичной дроби, если она по отбрасываніи запятой представитъ число, меньшее этого предѣла. Чтобы найти логариѳмы бо́льшихъ

чиселъ, замѣтимъ, что, дѣля ихъ на степени 10, выбранныя надлежащимъ образомъ, всегда можемъ свести ихъ на числа, находящіяся въ предѣлахъ таблицы. Такое дѣленіе даннаго числа уменьшаетъ его логариѳмъ на цѣлое число единицъ (**§ 374**) и, слѣдовательно, не вліяетъ на дробную часть послѣдняго. Такимъ образомъ задача приводится къ нахожденію логариѳма дробнаго числа, меньшаго 108000.

При этомъ мы *допускаемъ, что въ предѣлахъ, близкихъ между собою, возрастаніе логариѳмовъ пропорціонально возрастанію чиселъ*.

Пусть, напр., дано число 76807,753; имѣемъ:

$$\log 76807 = 4{,}8854008,$$

$$\log 76808 = 4{,}8854065;$$

разность ихъ, находящаяся въ таблицахъ, равна 57 (десятимилліоннымъ); слѣдовательно, если при увеличеніи числа на 1, его логариѳмъ увеличивается на 57, то при увеличеніи числа только на 0,753, его логариѳмъ увеличится на количество x, опредѣляемое изъ пропорціи:

$$\frac{1}{0{,}753} = \frac{57}{x},$$

откуда

$$x = 57 \times 0{,}753.$$

Итакъ, *для нахожденія x умножаемъ табличную разность на дробную часть даннаго числа*.

Въ произведеніи 57 на 0,753 надо взять только цѣлую часть, такъ какъ его дробная часть обозначаетъ уже десятыя или даже меньшія доли десятимилліонныхъ, которыя будутъ стоять не ближе, какъ на 8-мъ мѣстѣ послѣ запятой, а такія цифры мы отбрасываемъ въ логариѳмахъ.

Чтобы умножить 57 на 0,753, умножаемъ его послѣдовательно на 7, 5 и 3; эти произведенія вычислены и помѣщены въ послѣднемъ столбцѣ съ правой стороны, въ табличкѣ подъ 57. Они приведены къ цифрамъ, которыя должны быть сохранены, въ томъ предположеніи, что множитель выражаетъ десятыя доли. Такъ, напр., противъ 7 находимъ 40 вмѣсто точнаго произведенія 39,9; противъ 5 находимъ 29 вмѣсто 28,5; противъ 3 находимъ 17 вмѣсто 17,1. Въ разсматриваемомъ случаѣ 5 выражаетъ сотыя и, слѣдовательно, соотвѣтствующее произведеніе будетъ 2,9, вмѣсто

котораго возьмемъ 3, 3 выражаетъ тысячныя и соотвѣтствующее произведеніе, поэтому, должно быть раздѣлено на 100; получимъ 0,17, что мы отбросимъ.

Поэтому значеніе x равно 43, и для нахожденія искомаго логариѳма надо къ логариѳму 76807 прибавить 43 единицы сельмого порядка; получимъ 4,8854051

Если бы мы искали логариѳмъ 76807753, то, очевидно, онъ былъ бы равенъ 7,8854051. Вообще, если въ данномъ числѣ не измѣнять ни самихъ цифръ, ни мѣстъ, занимаемыхъ ими, то мантисса логариѳма не измѣнится, гдѣ бы мы ни поставили запятую.

Замѣчаніе.—Вычисленія располагаютъ такъ:

Число		Логариѳмъ	
77807	. .	8854006	
7	. .	40	
5	. .	2	9
3	.		17

Log 76807.753 = 4 8854051

При сложеніи не пишутъ отдѣльныхъ суммъ, происходящихъ отъ сложенія цифръ, расположенныхъ съ правой стороны вертикальной линіи; удерживаютъ только ту часть ихъ, которая войдетъ въ составъ единицъ седьмого порядка.

§ 379. Задача II. — *По данному числу найти изъ таблицъ его логариѳмъ.*

1-ый случай. — Если десятичная часть логариѳма находится среди логариѳмовъ первой хиліады, то мы тотчасъ найдемъ и соотвѣтствующее ему число, оно будетъ находиться въ одной строкѣ съ даннымъ логариѳмомъ, въ столбцѣ N, непосредственно предшествующемъ столбцу, содержащему данный логариѳмъ. Написавъ его, ставимъ запятую такъ, чтобы число цифръ цѣлой части было единицею больше числа единицъ въ характеристикѣ (**§ 373**).

Примѣры:

$$2{,}17026172 = \log 148.$$

$$0{,}06781451 = \log 1{,}169.$$

2-ой случай. — Если логариѳмъ не находится въ первой таблицѣ, то мы ищемъ три первыя цифры мантиссы этого логариѳма во

второй таблицѣ, среди отдѣльно стоящихъ чиселъ въ столбцѣ, помѣченномъ цифрою 0; найдя ихъ, ищемъ четыре послѣднія цифры логариѳма среди четырехзначныхъ чиселъ въ томъ же столбцѣ, спускаясь внизъ. Если эти четыре послѣднія цифры окажутся въ таблицѣ, то искомое число мы найдемъ противъ нихъ въ столбцѣ N. Это число выписываемъ и ставимъ запятую, сообразуясь съ характеристикою даннаго логариѳма.

Примѣры:

4,8872796 = log 77140;

2,8863779 = log 769,8.

3-ій случай. — Если въ столбцѣ, помѣченномъ цифрою 0, не окажется четырехъ послѣднихъ цифръ даннаго логариѳма, то останавливаемся на ближайшихъ *меньшихъ* и смотримъ затѣмъ слѣва направо, вдоль линіи, на которой остановились; если на ней окажутся четыре послѣднія цифры даннаго логариѳма, то цифра, которою помѣченъ тотъ столбецъ, гдѣ они нашлись, будетъ пятою цифрою искомаго числа; первыя же четыре его цифры мы находимъ, по предыдущему, въ столбцѣ N.

Пусть, напр., требуется найти, какому числу соотвѣтствуетъ логариѳмъ, мантисса котораго равна 8871276 Отыскиваемъ 887 между отдѣльными числами въ столбцѣ, помѣченномъ цифрою 0; затѣмъ спускаемся по этому столбцу до ближайшаго меньшаго къ 1276, т.-е. до 1107; далѣе, смотримъ вправо вдоль строки, гдѣ оно стоитъ, и въ столбцѣ, помѣченномъ цифрою 3, находимъ 1276; на той же строкѣ, въ столбцѣ N находимъ 7711; приписывая съ правой стороны цифру 3, получаемъ искомое число 77113. Наконецъ, соотвѣтственно характеристикѣ, ставимъ запятую.

Примѣры:

4,8871276 = log 77113;

2,8871276 = log 771,13.

4-ый случай. — Если данный логариѳмъ не подходитъ ни подъ одинъ изъ предыдущихъ случаевъ, то для опредѣленія числа, которому онъ принадлежитъ, ищемъ сначала, какъ и въ 3-мъ случаѣ, ближайшій *меньшій* логариѳмъ. Находимъ соотвѣтствующее цѣлое число; между нимъ и слѣдующимъ будетъ содержаться искомое

число, разность между искомымъ и однимъ изъ этихъ чиселъ найдемъ посредствомъ пропорціи (**§ 378**).

Примѣръ.—Найти число, логариѳмъ котораго имѣетъ мантиссу 8870282. Указаннымъ путемъ найдемъ, что этотъ логариѳмъ содержится между 8870262 и 8870318, которымъ соотвѣтствуютъ числа 77095 и 77096; разность между этими двумя логариѳмами, находящаяся въ таблицахъ, равна 57 единицамъ послѣдняго порядка, и данный логариѳмъ превосходитъ меньшій на 20 единицъ того же порядка. Разность 57 между логариѳмами соотвѣтствуетъ разности 1 между числами; слѣдовательно, разность 20 между логариѳмами соотвѣтствуетъ разности x между числами, опредѣляемой изъ пропорціи:

$$\frac{57}{20} = \frac{1}{x},$$

откуда $x = \frac{20}{57}$. Значитъ, искомое число равно $77095 + \frac{20}{57}$, или, въ десятичной дроби, 77095,35.

Такимъ образомъ, *для нахожденія x надо разность между даннымъ логариѳмомъ и меньшимъ изъ тѣхъ, между которыми онъ содержится, раздѣлить на табличную разность.*

Замѣчаніе I.—Если вычтемъ одинъ изъ другого два послѣдовательныхъ логариѳма 8870262 и 8870318, то найдемъ разность 56, а не 57. Однако можно принять разность 57, данную Каллетомъ, которая, благодаря непомѣщеннымъ въ таблицѣ дальнѣйшимъ цифрамъ, можетъ быть также близка къ истинному значенію, какъ и 56.

Замѣчаніе II.—При помощи таблички пропорціональныхъ частей x можно выразить десятичною дробью. Ищемъ въ ней, въ правомъ столбцѣ, ближайшее *меньшее* къ 20 число; находимъ 17, соотвѣтствующее 3; 3 есть цифра десятыхъ искомаго числа. Остается еще 20 — 17 = 3 единицамъ седьмого порядка; обращаемъ ихъ въ 30 единицъ восьмого порядка и снова ищемъ въ правомъ столбцѣ ближайшее меньшее къ 30 число—находимъ 29, цифра 5, соотвѣтствующая 29, даетъ сотыя искомаго числа.

Замѣчаніе III.—Вычисленія располагаютъ такъ:

Логариѳмъ		Число
8870282		
8870262		77095
20		35

$$4,8870282 = \log 77095,35.$$

Если бы мы искали число, логариѳмъ котораго равенъ 5,8870282, то нашли бы, очевидно, 770953, 5. Вообще, найдя, какъ было указано, семь послѣдовательныхъ цифръ искомаго числа, отдѣляютъ запятою съ лѣвой стороны цифръ на единицу больше, чѣмъ единицъ въ характеристикѣ.

§ 380. Замѣчаніе IV.—Мы не можемъ здѣсь указать предѣла ошибки, которую можно сдѣлать, допуская, что приращеніе логариѳмовъ пропорціонально приращенію чиселъ. Впрочемъ, всматриваясь въ таблицы, не трудно замѣтить, что эта пропорціональность почти точна въ предѣлахъ достаточно широкихъ. Въ самомъ дѣлѣ, разность двухъ послѣдовательныхъ логариѳмовъ измѣняется очень медленно, и при томъ приближеніи, какое даютъ таблицы, она остается часто постоянной на протяженіи нѣсколькихъ страницъ: изъ этого, очевидно, слѣдуетъ, что для цѣлыхъ чиселъ, находящихся на этихъ страницахъ, приращеніе логариѳмовъ пропорціонально приращенію чиселъ.

Пользуясь этою пропорціональностью, чтобы дополнить логариѳмъ числа (**§ 378**), мы дѣлаемъ ошибку, вліяющую только на цифры дальше седьмого порядка. Прилагая ту же пропорціональность къ нахожденію числа, соотвѣтствующаго данному логариѳму (**§ 379**), мы получаемъ при томъ приближеніи, какое даютъ таблицы, только двѣ цифры сверхъ тѣхъ пяти, которыя мы выписываемъ непосредственно.

VI. Приложеніе теоріи логариѳмовъ

§ 381. Логариѳмы, какъ средство выполнять умноженіе, дѣленіе, и проч.—Когда неизвѣстное число есть результатъ умноженій, дѣленій, возвышеній въ степени или извлеченій корней изъ данныхъ чиселъ, то для опредѣленія его значенія ищемъ сначала его логариѳмъ, что требуетъ болѣе простыхъ дѣйствій. Найдя логариѳмъ, опредѣляемъ соотвѣтствующее ему число, какъ было указано выше (**§ 379**).

Примѣръ.—Вычислить выраженіе

$$x = \frac{\sqrt[7]{36926{,}5^3} \times \sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{6258{,}96^2}}$$

На основаніи свойствъ логариѳмовъ (**§ 365** и слѣд.) имѣемъ

$$\log x = \frac{3}{7} \log 36926{,}5 + \frac{1}{5} \log 2629 - \frac{2}{3} \log 6258{,}96.$$

Ищемъ эти три логариѳма въ таблицахъ и выполняемъ вычисленіе:

1. 36926 . . 5673323

5 . 59

$\log 36926{,}5 = 4{,}5673382$

$3 \log 36926{,}5 = 13{,}7020146$

$\frac{3}{7} \log 36926{,}5 = \ldots \quad 1{,}9574307$

2. $\log 2629 = 3{,}4197906$

$\frac{1}{5} \log 2629 = \ldots \quad 0{,}6839581$

3. 62589 . . 7964980

6 42

$\log 6258{,}96 = 3{,}7965022$

$2 \log 6258{,}96 = 7{,}5930044$

$\frac{2}{3} \log 6258{,}96 = \ldots \quad 2{,}5310015$

$\log x \ldots \quad 0{,}1103873$

1103873

1103540 12893

333 99

Итакъ,

$$x = 1{,}289399.$$

§ 382. Случай, когда нѣкоторыя изъ данныхъ чиселъ меньше единицы.—На основаніи нашихъ опредѣленій только числа, большія единицы, имѣютъ логариѳмы. Поэтому необходимо, чтобы всѣ числа, надъ которыми производятся дѣйствія, удовлетворяли этому условію. Это всегда можно сдѣлать, такъ какъ, если нужно умножить нѣкоторое число на a, меньшее единицы, то мы можемъ раздѣлить его на $\frac{1}{a}$, большее единицы; если нужно раздѣлить на a, то можно, наоборотъ, умножить на $\frac{1}{a}$.

Примѣръ.—Вычислить выраженіе

$$x = \left(\sqrt[3]{13572 \cdot \frac{1}{11}}\right)^2.$$

Напишемъ:

$$x = \left(\sqrt[3]{\frac{13572}{11}}\right)^2,$$

слѣдовательно,

$$\log x - \frac{2}{3}\left(\log 13572 - \log 11\right).$$

Находимъ:

$$\log 13572 = 4{,}1326439$$

$$\log 11 = 1{,}0413927$$

$$\log 13572 - \log 11 = 3{,}0912512$$

$$2(\log 13572 - \log 11) = 6{,}1825024$$

$$\log x = \frac{2}{3}\left(\log 13572 - \log 11\right) = 2{,}0608341$$

0608341

0608111 .. 11503

230 .... 608.

Итакъ,

$$x = 115{,}03608.$$

§ 383. Случай, когда число, которое требуется вычислить, меньше единицы.—Если само число, которое требуется вычислить, меньше единицы, то сдѣланныя нами опредѣленія не даютъ для него логариѳма. Въ этомъ случаѣ данное число умножаютъ предварительно на такую степень 10, чтобы произведеніе было больше единицы; затѣмъ прилагаютъ предыдущій методъ и результатъ раздѣляютъ на ту же степень 10.

Примѣръ.—Вычислить выраженіе

$$x = \sqrt{\frac{1}{375} \cdot 0{,}5142}\,.$$

Такъ какъ x меньше единицы, то мы умножаемъ его на 10^n, причемъ n опредѣлимъ впослѣдствіи; будемъ имѣть:

$$10^n \times x = 10^n \sqrt{\frac{1}{375} \times \frac{5142}{10000}} = \frac{10^n}{\sqrt[5]{\frac{375 \cdot 10000}{5142}}};$$

слѣдовательно,

$$\log\left(10^n \times x\right) - n - \frac{1}{5}\left(\log 375 + \log 10000 - \log 5142\right).$$

По таблицамъ находимъ:

$$\log 375 = 2{,}5740313$$
$$\log 10000 = 4,$$
$$\log 5142 = 3{,}7111321$$

$$\log 375 + \log 10000 - \log 5142 = 2{,}8628992$$

$$\frac{1}{5}(\log 375 + \log 10000 - \log 5142) = 0{,}5725798.$$

Чтобы можно было выполнить вычитаніе, достаточно, очевидно, положить $n = 1$; такимъ образомъ будемъ имѣть

$$\log 10x = 1 - 0{,}5725798 = 0{,}4274202.$$

Вычисляемъ теперь соотвѣтствующее число:

0,4274202		
0,4274050		26755
152		94.

Итакъ,

$$10x = 2{,}675594, \text{ откуда } x = 0{,}2675594.$$

VII. Отрицательныя характеристики

§ 384. Опредѣленіе отрицательной характеристики.—Наши опредѣленія не даютъ логариѳмовъ для чиселъ меньшихъ единицы, и мы видѣли (**§ 383**), что для примѣненія къ такимъ числамъ сокращеннаго способа вычисленій при помощи логариѳмовъ, мы должны приводить ихъ къ числамъ бо́льшимъ единицы, умножая на подходящую степень 10. Но на практикѣ обыкновенно поступаютъ иначе. Не замѣняютъ чиселъ меньшихъ единицы другими, а даютъ опредѣленіе логариѳмовъ этихъ чиселъ, введя нѣкоторое формальное соглашеніе, и доказываютъ, что свойства, которыми обладаютъ прежніе логариѳмы (**§ 365** и слѣд.), распространяются безъ измѣненій и на новые логариѳмы.

Чтобы опредѣлить логариѳмъ числа A меньшаго единицы, замѣтимъ, что всегда можно умножить A на нѣкоторую степень n отъ 10, выбранную такимъ образомъ, чтобы произведеніе было больше единицы и, слѣдовательно, имѣло бы логариѳмъ (**§ 357**). Но мы видѣли (**§ 374**), что при дѣленіи на 10^n числа бо́льшаго 10^n мантисса его логариѳма не измѣняется, а характеристика (которая больше или равна n), уменьшается на n единицъ. *Соглашаются* распространить эту теорему на числа меньшія 10^n, кото-

рыя послѣ дѣленія становятся меньше единицы, и *называть логариѳмомъ A логариѳмъ числа* $(A \times 10^n)$, *уменьшенный на n единицъ.*

Примѣръ. — Найти логариѳмъ числа 0.0076807753.

Умножимъ это число на 1000, чтобы получить число, большее единицы и меньшее десяти; получимъ произведеніе 7,6807753, логариѳмъ котораго будетъ 0,8854051 (**§ 378**).

Чтобы найти искомый логариѳмъ, надо отъ полученнаго результата отнять 3. Такимъ образомъ, по опредѣленію,

$$\log 0{,}0076807753 = 0{,}8854051 - 3.$$

Такъ какъ 3—цѣлое число, то вычитаемъ его изъ характеристики которая станетъ, поэтому, отрицательной, а мантисса по прежнему будетъ положительною. Пишутъ это слѣдующимъ образомъ:

$$\log 0{,}0076807753 = \bar{3}{,}8854051.$$

Если надо нѣкоторое число A умножить на 10^n, чтобы сдѣлать его больше единицы и меньше 10, то характеристика произведенія, равная нулю, послѣ вычитанія обратится въ $\bar{n}$. Отсюда легко усмотрѣть, что *отрицательная характеристика логариѳма числа, меньшаго единицы, содержитъ число единицъ, равное числу, показывающему, какое мѣсто послѣ запятой занимаетъ первая значущая цифра даннаго числа.*

§ 385. Вычисленія, относящіяся къ числамъ меньшимъ единицы.— Изъ соглашенія, служащаго опредѣленіемъ логариѳмовъ чиселъ меньшихъ единицы вытекаетъ, что *мантиссу этихъ логариѳмовъ вычисляютъ по изложеннымъ правиламъ* (**§§ 377 и 378**), *т.-е. не принимая во вниманіе запятой, и приписываютъ къ ней отрицательную характеристику, равную по абсолютной величинѣ числу, показывающему, какое мѣсто послѣ запятой занимаетъ первая значущая цифра даннаго числа.*

Обратно, *цифры числа, соотвѣтствующаго нѣкоторому логариѳму съ отрицательною характеристикою, вычисляютъ по изложеннымъ правиламъ* (**§§ 379 и 380**), *т.-е не принимая во вниманіе характеристики; затѣмъ ставятъ запятую такъ, чтобы число, показывающее, какое мѣсто послѣ запятой занимаетъ первая значущая цифра, равнялось числу единицъ, заключающихся въ характеристикѣ.*

§ 386. Распространеніе свойствъ логариѳмовъ на случай, когда числа меньше единицы.—Основное свойство логариѳмовъ состоитъ въ томъ, что *логариѳмъ произведенія изъ двухъ множителей равенъ суммѣ логариѳмовъ этихъ множителей.* Мы покажемъ, что это свойство распространяется и на тотъ случай, когда множители меньше единицы.

Пусть будутъ даны два числа A и B, оба меньше единицы; пусть 10^p и 10^q—тѣ степени десяти, на которыя надо помножить данныя числа, чтобы они стали больше единицы и меньше десяти. Логариѳмы обоихъ произведеній будутъ содержаться между 0 и 1 (**§ 373**), поэтому, обозначая ихъ черезъ $0,a$ и $0,b$, будемъ имѣть:

$$\log(A \times 10^p) = 0,a, \quad \log(B \times 10^q) = 0,b.$$

Въ такомъ случаѣ изъ опредѣленія слѣдуетъ (**§ 384**), что

$$\log A = 0,a - p, \quad \log B = 0,b - q,$$

и, значитъ,

$$\log A + \log B = 0,a + 0,b - p - q. \qquad (1)$$

Съ другой стороны, прилагая основное свойство (**§ 365**) къ числамъ $(A \times 10^p)$ и $(B \times 10^q)$, большимъ единицы, будемъ имѣть:

$$\log[(A \times 10^p)(B \times 10^q)] = \log(A \times 10^p) + \log(B \times 10^q),$$

или

$$\log(AB \times 10^{p+q}) = 0,a + 0,b$$

слѣдовательно, прилагая къ числу AB, которое меньше единицы, соглашеніе **§ 384**-го, напишемъ:

$$\log AB = \log(AB \times 10^{p+q}) - (p + q),$$

или

$$\log AB = 0,a + 0,b - (p + q). \qquad (2)$$

Наконецъ, сравнивая равенства (1) и (2), находимъ.

$$\log AB = \log A + \log B, \qquad (3)$$

что и требовалось доказать. Точно такъ же можно доказать эту теорему и для того случая, когда одно изъ чиселъ, A или B, было бы больше единицы.

Распространивъ такимъ образомъ основное свойство на всѣ случаи, мы этимъ самымъ обобщили и остальныя свойства логариѳмовъ (**§§ 368, 369 и 370**), такъ какъ они представляютъ слѣдствія перваго.

§ 387. Правила вычисленій при дѣйствіяхъ надъ логариѳмами съ отрицательною характеристикою. — Логариѳмъ съ отрицательною характеристикою долженъ быть разсматриваемъ, какъ двучленъ вида $(-a + b)$, въ которомъ $-a$ представляетъ характеристику, а b — мантиссу. Поэтому, встрѣтивъ такое число при сложеніи, мы должны прибавить мантиссу и вычесть абсолютную величину характеристики. Напротивъ, при вычитаніи такого логариѳма, надо вычесть мантиссу и прибавить абсолютную величину характеристики.

Примѣры:

Сложеніе	Вычитаніе
2,7396452	3,5236729
$\bar{3}$,6854386	2,7854831
2,6734895	
$\bar{1}$,0985733	2,7381898

При умноженіи числа съ отрицательною характеристикою на цѣлое число, умножаютъ на множителя отдѣльно мантиссу и отдѣльно характеристику и потомъ дѣлаютъ приведеніе.

Примѣръ:

Умноженіе

```
  3,89367386
          24
  ──────────
   357469544
  178734772
  ──────────
 21,44817264
—72
 ───────────
```

Произведеніе равно 51,44817264.

При дѣленіи на цѣлое число, дѣлимъ сначала отрицательную характеристику дѣлимаго на дѣлитель: и, если дѣленіе совершается безъ остатка, то дѣйствіе заканчиваемъ дѣленіемъ мантиссы на дѣлитель. Но если характеристика дѣлимаго не дѣлится точно на дѣлитель, то для того чтобы получить частное такого же вида,

какъ и дѣлимое, беремъ частное по избытку; такимъ образомъ мы получаемъ отрицательную характеристику частнаго и положительный остатокъ, который прибавляемъ къ мантиссѣ дѣлимаго; дѣля получаемую сумму на дѣлитель, находимъ положительную дробную часть частнаго.

Примѣры:

Дѣленіе: 1-ый случай		Дѣленіе 2-ой случай	
12,7328642	6	13,2672958	5
2	$\bar{2}$,1221440	3	$\bar{3}$,4534591

Первый случай не нуждается въ объясненіи. Что касается второго, то замѣчая, что 13 не дѣлится на 5 и что ближайшее большее число, дѣлящееся на 5, есть 15, мы можемъ написать дѣлимое въ видѣ $-15+2{,}2672958$; частное отъ дѣленія -15 на 5 равно -3, а отъ дѣленія 2,2672958 на 5 равно 0,4534591; слѣдовательно, полное частное есть $\bar{3}$,4534591. Этотъ результатъ, очевидно, получается по вышеизложенному правилу.

§ 388. Приложеніе. — Эти соглашенія даютъ возможность примѣнять обычные пріемы вычисленія логариѳмовъ и въ тѣхъ случаяхъ, когда нѣкоторыя числа меньше единицы, не дѣлая предварительно послѣднихъ больше единицы. Въ самомъ дѣлѣ, возвратимся къ вычисленію выраженія § 383-го.

$$x=\sqrt[5]{\frac{1}{375}\times 0{,}5142}\,.$$

Имѣемъ.

$$\log x=\frac{1}{5}\left(\log\frac{1}{375}+\log 0{,}5142\right).$$

Но

$$\log\frac{1}{375}=\log 1-\log 375=0-2{,}5740313=\bar{3}{,}4259687$$

и

$$\log 0{,}5142=\bar{1}{,}7111321,$$

а потому

$$\log\frac{1}{375}+\log 0{,}5142=\bar{3}{,}1371008$$

и

$$\frac{1}{5}\left(\log\frac{1}{375}+\log 0{,}5142\right)=\bar{1}{,}4274202.$$

Слѣдовательно, соотвѣтствующее число $x=0{,}2675594$.

VIII. Употребленіе дополненій

§ 389. Опредѣленіе.—*Дополненіемъ* числа N до 10 называется разность $10 - N$. Если число N - положительное и меньше 10, то цифры дополненія представляютъ дополненія до 9 цифръ числа N, исключая послѣдней значущей цифры справа, представляющей дополненіе до 10 послѣдней цифры числа N.

Примѣры:

$$\text{Доп. } 3{,}72543 = 6{,}27457,$$

$$\text{Доп. } 7{,}28540 = 2{,}71460.$$

Если число—положительное и больше 10, то дробную часть дополненія мы получаемъ по тому же правилу, для полученія же цѣлой части вычитаемъ 10 изъ цѣлой части числа, прибавляемъ 1 и результатъ пишемъ со знакомъ —.

Примѣръ:

$$\text{Доп. } 12{,}7258 = \bar{3}{,}2742,$$

такъ какъ надо изъ 10 вычесть 12,7258 (§ 387).

Если число N имѣетъ отрицательную характеристику, то прибавляемъ абсолютную величину послѣдней къ 10, вычитаемъ единицу и приписываемъ дополненіе дробной части.

Примѣръ:

$$\text{Доп. } \bar{3}{,}74652 = 12{,}25348,$$

такъ какъ здѣсь надо произвести дѣйствія: $10 + 3 - 0{,}74652$.

§ 390. Употребленіе дополненій.—Когда при логариѳмическихъ вычисленіяхъ приходится производить вычитаніе, то при помощи дополненій его по большей части замѣняютъ сложеніемъ. Дѣйствительно, имѣемъ тождественно:

$$a - b = a + (10 - b) - 10.$$

Поэтому, для вычисленія разности $(a - b)$ достаточно прибавить къ a дополненіе b и изъ результата вычесть 10.

Вообще, чтобы вычислить выраженіе $(a - b + c - d + e - f)$, замѣняютъ его равносильнымъ выраженіемъ:

$$(a + \text{Доп. } b + c + \text{Доп. } d + e + \text{Доп. } f - 30),$$

значеніе котораго найдемъ посредствомъ сложенія.

Примѣръ.—Вычислить пятую степень отъ $\frac{2}{37}$. Имѣемъ:

$$\log 2 = \ldots \quad 0{,}30103000$$

$$\log 37 = 1{,}56820172$$

$$\text{Доп} \log 37 \quad \ldots \quad 8{,}43179828$$

$$\log \frac{2}{37} \quad \ldots \quad 8{,}73282828;$$

$$\log\left(\frac{2}{37}\right)^5 = 5 \log\frac{2}{37} = 7{,}66414140.$$

6641414	
6641341	46146
73	77;

слѣдовательно,

$$\left(\frac{2}{37}\right)^5 = 0{,}0000004614677.$$

IX. Различныя системы логариѳмовъ

§ 391. Существуетъ безчисленное множество системъ логариѳмовъ.— Можно выбрать произвольно двѣ прогрессіи, одну—ариѳметическую, начинающуюся съ нуля, другую—геометрическую, начинающуюся съ единицы; онѣ дадутъ систему логариѳмовъ, обладающую всѣми доказанными свойствами (**§ 365** и слѣд.). Слѣдовательно, этихъ системъ—безчисленное множество; онѣ связаны другъ съ другомъ очень простымъ закономъ, вытекающимъ изъ слѣдующей теоремы.

§ 392. Тоерема.—*Отношеніе логариѳмовъ двухъ чиселъ одинаково во всѣхъ системахъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, пусть будутъ A и B два какихъ-нибудь числа, а $\frac{m}{n}$ дробь, представляющая въ нѣкоторой системѣ отношеніе логариѳмовъ данныхъ чиселъ, при чемъ числитель и знаменатель этой дроби—цѣлыя числа. Имѣемъ:

$$\frac{\log A}{\log B} = \frac{m}{n}, \quad \text{откуда} \quad n\log A = m\log B. \tag{1}$$

Это послѣднее равенство равносильно слѣдующему:

$$\log A^n = \log B^m, \quad \text{откуда} \quad A^n = B^m. \tag{2}$$

Пусть теперь въ нѣкоторой другой системѣ логариѳмы обозначены черезъ log′; беря въ этой системѣ логариѳмы обѣихъ частей равенства (2), получимъ:

$$n\log' A = m\log' B, \text{ откуда } \frac{\log' A}{\log' B} = \frac{m}{n}, \qquad (3)$$

а потому

$$\frac{\log' A}{\log' B} = \frac{\log A}{\log B}, \qquad (4)$$

что и требовалось доказать.

Замѣчаніе.—Предыдущее доказательство предполагаетъ, что отношеніе двухъ разсматриваемыхъ логариѳмовъ соизмѣримо. Если же оно несоизмѣримо, то мы можемъ разсматривать два другихъ логариѳма, отличающихся отъ первыхъ на сколь-угодно малую величину и удовлетворяющихъ этому условію; теорема прилагается къ нимъ, какъ бы близко они ни были взяты къ двумъ даннымъ логариѳмамъ, и потому мы будемъ считать очевиднымъ, что она равно прилагается и къ послѣднимъ.

§ 393. Слѣдствіе.—Изъ равенства (4) находимъ:

$$\frac{\log' A}{\log A} = \frac{\log' B}{\log B}. \qquad (5)$$

Такимъ образомъ, *отношеніе логариѳмовъ одного и того же числа въ двухъ различныхъ системахъ—одно и то же для всѣхъ чиселъ.*

§ 394. Модуль. — Если для двухъ опредѣленныхъ системъ обозначимъ это постоянное отношеніе черезъ M, то будемъ имѣть:

$$\log' A = M\log A. \qquad (6)$$

Поэтому, *если извѣстны логариѳмы всѣхъ чиселъ въ нѣкоторой системѣ, то для нахожденія ихъ логариѳмовъ въ другой системѣ, надо умножить первые на постоянное число M.* Это постоянное число называется *модулемъ* новой системы относительно первой.

§ 395. Основаніе. — Изъ предыдущей теоремы вытекаетъ, что, имѣя какую-нибудь одну таблицу логариѳмовъ, мы можемъ составить и другую, если только намъ извѣстенъ хотя одинъ изъ логариѳмовъ новой системы. Дѣйствительно, изъ равенства (4) слѣдуетъ, что

$$\log' A = \log A \,.\, \frac{\log' B}{\log B}, \qquad (7)$$

а потому, если извѣстенъ $\log' B$, то для нахожденія новаго логариѳма A достаточно умножить старый $\log A$ на извѣстное въ такомъ случаѣ отношеніе $\frac{\log' B}{\log B}$.

Для опредѣленія системы логариѳмовъ, обыкновенно даютъ число, логариѳмъ котораго равенъ единицѣ. Это число называется *основаніемъ* системы.

Основаніе системы обыкновенныхъ логариѳмовъ есть 10.

§ 396. Вычисленіе логариѳма числа въ какой-угодно системѣ.—На основаніи предыдущаго таблицы обыкновенныхъ логариѳмовъ, вычисленныя при основаніи 10, даютъ возможность вычислить логариѳмъ числа въ какой-угодно системѣ. Вычислимъ, напр., логариѳмъ числа 7698 въ системѣ съ основаніемъ 12. Въ системѣ съ основаніемъ 10, по таблицамъ Каллета, находимъ:

$$\log 7698 = 3{,}8863779, \quad \log 12 = 1{,}07918125.$$

Въ системѣ съ основаніемъ 12 имѣемъ:

$$\log' 7698 = x, \quad \log' 12 = 1.$$

Слѣдовательно (**§ 395**),

$$x = 3{,}8863779 \times \frac{1}{1{,}07918125},$$

или

$$x = 3{,}60122815.$$

§ 397. Вычисленіе основанія системы, въ которой извѣстенъ логариѳмъ нѣкотораго числа.—Пусть, напр., требуется найти основаніе системы, въ которой логариѳмъ 25 равенъ 0,78321. Обозначая основаніе этой системы черезъ x, будемъ имѣть:

$$\log' x = 1, \quad \log' 25 = 0{,}78321;$$

въ системѣ же обыкноаенныхъ логариѳмовъ

$$\log 25 = 1{,}39794001.$$

Слѣдовательно (**§ 395**),

$$\log x = \frac{1{,}39794001}{0{,}78321} = 1{,}7848853,$$

откуда

$$x = 60{,}93759.$$

УПРАЖНЕНІЯ

I. Узнать знаменатель геометрической прогрессіи изъ 11 членовъ, первый членъ которой есть 10, а послѣдній 100. Найти сумму S этой прогрессіи.

Отв. $q = 1{,}258925$, $S = 447{,}5910$.

II. Узнать основаніе x системы логариѳмовъ, въ которой 6 есть логариѳмъ 729.

Отв. $x = 3$.

III. При какихъ соизмѣримыхъ основаніяхъ логариѳмъ 20 будетъ соизмѣримымъ числомъ?

Отв. Основаніе равно 20^p, гдѣ p—цѣлое.

IV. При какомъ основаніи x системы логариѳмовъ данное цѣлое число a равно своему логариѳму?

Отв. $x = \sqrt[a]{a}$.

V. Рѣшить систему

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad \log x + \log y = \frac{m}{n}.$$

Отв. Замѣчаемъ, что 2-ое уравненіе равносильно уравненію $xy = \sqrt[n]{10^m}$, а это приводитъ насъ къ извѣстной задачѣ.

VI. Рѣшить систему

$$x^4 + y^4 = a^4, \quad \log x + \log y = \frac{p}{q}.$$

Отв. Тотъ же пріемъ.

VII. Вычислить выраженіе

$$x = \frac{\left(\sqrt[5]{3226727}\right)^6}{\left(\sqrt[7]{10732872}\right)^4}.$$

Отв. $x = 6208{,}157$.

VIII. Вычислить выраженіе

$$x = \frac{\left(\sqrt[12]{0{,}0000782567}\right)^{25}}{\left(\sqrt[16]{0{,}000389672}\right)^{30}}.$$

Отв. $x = 0{,}006875045$.

IX. Вычислить выраженіе

$$x = \frac{\sqrt[4]{(b^3 - a^2)^6 c^2}}{\sqrt[3]{a + d\sqrt{e}}}$$

при $a = 4{,}528627$, $b = 21{,}72857$, $c = \frac{30}{59}$, $d = 0{,}00875$, $e = 4839$.

Отв. $x = 3966{,}30$.

X. Вычислить выраженіе

$$x = \frac{\sqrt[3]{a^2 + b\sqrt{c}}}{10\sqrt[4]{d - ae^3}}$$

при $a = 27{,}35825$, $b = 3{,}2782$, $c = \frac{52}{79}$, $d = 38{,}54$, $e = 0{,}003528$

Отв. $x = 0{,}3648341$.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Сложные проценты и срочныя (годовыя) уплаты

I. Сложные проценты

§ 398. Опредѣленія. — *Капиталъ*, отданный взаймы на извѣстное время, приноситъ прибыль, которая называется *процентными деньгами*. *Процентомъ* называется прибыль, приносимая капиталомъ въ 100 фр. въ теченіи одного года. Обыкновенно кредиторъ получаетъ въ концѣ каждаго года *простые* проценты на свой капиталъ. Но если вмѣсто того, чтобы брать проценты, онъ прибавляетъ ихъ къ капиталу по мѣрѣ *наростанія*, т.-е. въ тѣ сроки, когда онъ можетъ ихъ получать, то капиталъ увеличивается, а вмѣстѣ съ нимъ возрастаютъ ежегодно и процентныя деньги; тогда говорятъ, что капиталъ помѣщенъ по *сложнымъ процентамъ*.

Въ формулахъ, которыя мы сейчасъ выведемъ, мы будемъ обозначать отданный капиталъ черезъ C, капиталъ вмѣстѣ съ сложными процентами черезъ A и продолжительность обращенія (выраженную въ годахъ) черезъ n. Прибыль, приносимую 1 франкомъ въ одинъ годъ, будемъ называть черезъ r, такъ что r составитъ сотую часть процента.

§ 399. Общая формула сложныхъ процентовъ.—Такъ какъ 1 франкъ приноситъ r фр. въ годъ и, слѣдовательно, въ концѣ года обра-

тится въ $(1+r)$, то капиталъ C въ концѣ того же срока обратится въ $C(1+r)$. Такимъ образомъ, чтобы вычислить, во что обратится капиталъ, отданный на одинъ годъ, надо умножить его на $(1+r)$.

Капиталъ $C(1+r)$, отданный въ началѣ второго года, въ концѣ его обратится въ $C(1+r)(1+r)$, или $C(1+r)^2$. Эта новая сумма, обращающаяся въ теченіи 3-го года, умножится еще на $(1+r)$ и обратится въ $C(1+r)^3$. Вообще, отданная въ ростъ сумма ежегодно умножается на $(1+r)$ и послѣ n лѣтъ обратится въ слѣдующую:

$$A = C(1+r)^n. \tag{1}$$

Это и есть формула сложныхъ процентовъ.

§ 400. Случай, когда время обращенія капитала содержитъ части года. — Если время обращенія состоитъ изъ n лѣтъ и k дней, то сначала мы вычисляемъ по формулѣ (1), во что обратится капиталъ C по истеченіи n лѣтъ. Затѣмъ, замѣчая, что 1 франкъ въ k дней приноситъ $\frac{kr}{t}$ по простымъ процентамъ (t—число дней въ году), заключаемъ, что 1 франкъ въ концѣ этого времени обратится въ $\left(1+\frac{kr}{t}\right)$, а капиталъ A — въ $A\left(1+\frac{kr}{t}\right)$. Поэтому, обозначая искомый капиталъ черезъ A' и замѣняя A его значеніемъ (1), будемъ имѣть:

$$A' = C(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right). \tag{2}$$

§ 401. Задачи. — Эти формулы служатъ для рѣшенія нѣкоторыхъ такихъ задачъ, гдѣ приходится пользоваться логариѳмами.

1. *Во что обратится данная сумма C, помѣщенная по даннымъ процентамъ* 100 r *на данное время?* Пользуемся формулою (1) или формулою (2), смотря по тому, состоитъ ли данное время изъ цѣлаго числа лѣтъ, или содержитъ сверхъ этого еще k дней.

2. *Какую сумму надо помѣстить въ настоящее время по даннымъ процентамъ* 100 r, *чтобы получить опредѣленную сумму A по истеченіи даннаго промежутка времени?* Опять пользуемся одною изъ формулъ (1) или (2) и соотвѣтственно получаемъ:

$$(3) \qquad C = \frac{A}{(1+r)^n} \quad \text{или} \quad C = \frac{A}{(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right)}. \qquad (4)$$

3. *Данный капиталъ C обращается въ данную сумму A по прошествіи даннаго времени. По скольку процентовъ помѣщенъ капиталъ?* Если время представляетъ цѣлое число лѣтъ, то изъ формулы (1) находимъ:

$$(1+r)=\sqrt[n]{\frac{A}{C}}. \qquad (5)$$

Если же время состоитъ изъ n лѣтъ и k дней, то придется рѣшать уравненіе (2), $(n+1)$-ой степени относительно r; рѣшеніе такого уравненія принадлежитъ высшей алгебрѣ. Однако, при помощи нѣкоторыхъ надлежащихъ соображеній, можно вычислить быстро приближенное значеніе процентовъ. Въ самомъ дѣлѣ, замѣчаемъ, что на основаніи формулы:

$$A=C(1+r)^n\left(1+\frac{kr}{t}\right) \qquad (2)$$

капиталъ A увеличвается и уменьшается вмѣстѣ съ r. Слѣдовательно, если дадимъ для r первое произвольное значеніе r' и вычислимъ по логариѳмамъ значеніе второй части, то найдемъ для A' значеніе бо́льшее A, если r' слишкомъ велико, и меньшее A, если r' слишкомъ мало. Сравнивая найденное значеніе A' съ даннымъ значеніемъ A, находимъ, будетъ ли r' больше или меньше неизвѣстнаго числа процентовъ. Далѣе, выбираемъ другое значеніе для r, которое приведетъ къ новому вычисленію и новому сравненію. Послѣ нѣсколькихъ такихъ попытовъ мы безъ труда заключимъ r между двумя предѣлами, откуда быстро найдемъ приближенное значеніе.

4. *Въ теченіи какого времени данный капиталъ C обратится въ опредѣленную сумму A, будучи отданъ по даннымъ процентамъ* $100\,r$? Такъ какъ неизвѣстно, будетъ ли искомое время — цѣлое число лѣтъ или нѣтъ, то мы не имѣемъ права употреблять формулу (1), выведенную въ томъ предположеніи, что n — цѣлое. Однако, пользуясь ею, найдемъ:

$$(1+r)^n=\frac{A}{C},$$

откуда, взявъ логариѳмы обѣихъ частей и раздѣливъ ихъ затѣмъ на $\log(1+r)$, получимъ:

$$n=\frac{\log A-\log C}{\log(1+r)}. \qquad (6)$$

Если частное отъ дѣленія $(\log A - \log C)$ на $\log(1+r)$ — цѣлое число, то, очевидно, оно представляетъ искомое число лѣтъ, такъ какъ изъ формулы (6) вытекаетъ формула (1). Если же частное не есть цѣлое число, то приходится заключить, что неизвѣстное время также не представляетъ цѣлаго числа лѣтъ. Однако, можно показать, что въ этомъ случаѣ *цѣлая часть частнаго есть цѣлая часть неизвѣстнаго времени.* Дѣйствительно, обозначая черезъ p и $(p+1)$ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, между которыми содержится дробь (6), мы будемъ имѣть:

$$p < \frac{\log A - \log C}{\log(1+r)} < p+1,$$

откуда

$$p\log(1+r) < \log A - \log C < (p+1)\log(1+r),$$

или

$$\log(1+r)^p < \log\frac{A}{C} < \log(1+r)^{p+1}.$$

Переходя отъ логариѳмовъ къ числамъ, находимъ:

$$(1+r)^p < \frac{A}{C} < (1+r)^{p+1},$$

или

$$C(1+r)^p < A < C(1+r)^{p+1}; \tag{7}$$

эти неравенства и доказываютъ высказанную теорему.

А чтобы узнать теперь число k дней, дополняющихъ искомое время, замѣтимъ, что формула (2), которая должна быть примѣнена въ этомъ случаѣ, даетъ послѣ замѣны n на p:

$$\log A = \log C + p\log(1+r) + \log\left(1+\frac{kr}{t}\right),$$

откуда

$$\frac{\log A - \log C}{\log(1+r)} = p + \frac{\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)}{\log(1+r)}.$$

Но p больше цѣлаго числа, содержащагося въ $\frac{\log A - \log C}{\log(1+r)}$; поэтому, обозначая черезъ R остатокъ отъ дѣленія числителя на знаменатель, мы можемъ предыдущее равенство переписать такъ:

$$p + \frac{R}{\log(1+r)} = p + \frac{\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)}{\log(1+r)},$$

откуда заключаемъ, что

$$\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)=R. \tag{8}$$

Такимъ образомъ мы будемъ знать логариѳмъ $\left(1+\frac{kr}{t}\right)$, послѣ чего не трудно уже найти сначала $\left(1+\frac{kr}{t}\right)$ и затѣмъ k.

Теперь дадимъ нѣсколько численныхъ приложеній.

§ 402. Численныя приложенія. Примѣръ I.—*Вычислить, во что обратится капиталъ въ 8000 франковъ черезъ 39 лѣтъ, будучи отданъ по $4^1/2$ процента въ годъ.*

Изъ формулы (1) имѣемъ:

$$\log A=\log C+n\log(1+r).$$

$$\log C=\log 8000= \ldots\ldots = 3{,}9030900$$

$$\log(1+r)=\log(1{,}045)=0{,}0191162904$$

$$n\log(1+r)=39\log(1{,}045)= \ldots\ldots = 0{,}7455353$$

$$\log A= \ldots\ldots = 4{,}6486253,$$

откуда

$$A=44527{,}19 \text{ фр.}$$

Примѣръ II.—*Если бы отдали въ началѣ христіанской эры 1 сантимъ по 5 процентовъ, то во что обратился бы онъ къ началу 1863 г., т. е. по истеченіи 1862 лѣтъ?*

Изъ формулы (1):

$$\log A=\log C+n\log(1+r)$$

$$\log C=\log(0{,}01)= \ldots\ldots = -2$$

$$\log(1+r)=\log(1{,}05)=0{,}02118929907$$

$$n\log(1+r)=1862\log(1{,}05)= \ldots\ldots = 39{,}3234475$$

$$\log A= \ldots\ldots \quad 37{,}3234475,$$

откуда

$$A=21059472\times 10^{30} \text{ фр. (приблизительно).}$$

Число это имѣетъ 38 цифръ.

Чтобы представить себѣ эту огромную сумму въ болѣе наглядной формѣ, вычислимъ размѣры шара изъ золота, равнаго по стоимости найденной суммѣ. Плотность золота 19,5, а цѣна килограмма его $\frac{31000}{9}$ фр. Обозначимъ черезъ x радіусъ шара, выраженный въ метрахъ; объемъ его равенъ $\frac{4\pi x^3}{3}$, а слѣдовательно, вѣсъ будетъ $\frac{4\pi x^3}{3}\times 19500$ килограм-

мовъ и стоимость въ франкахъ $\frac{4\pi x^3}{3} \times 19500 \times \frac{31000}{9}$. Такимъ образомъ,

$$A = \frac{4\pi x^3 \times 19500 \times 31000}{27},$$

откуда

$$x^3 = \frac{27A}{4\pi \times 19500 \times 31000}.$$

$$\log 27 = 1,43136376$$
$$\log A = 37,32344749$$
$$\text{Доп.} \log 4 - 10 = \bar{1},39794001$$
$$\text{Доп.} \log \pi - 10 = \bar{1},50285013$$
$$\text{Доп} \log 19500 - 10 = \bar{5},70996539$$
$$\text{Доп.} \log 31000 - 10 = \bar{5},50863831$$

$$\log x^3 = 28,87420509,$$
$$\log x = 9,6247350,$$

откуда

$$x = 4214392 \times 10^3 \text{ метрамъ}.$$

Такимъ образомъ радіусъ шара равенъ почти 4214392 километрамъ, и, слѣдовательно, объемъ его превосходилъ бы объемъ земли болѣе, чѣмъ въ 290 миллıоновъ разъ.

Примѣръ III.—*Какой капиталъ черезъ 33 года обратится въ 7220 фр., будучи отданъ по 5 процентовъ въ годъ?*

Изъ формулы (3) имѣемъ:

$$\log C = \log A - n\log(1+r).$$

$$\log A = \log 7220 = \ldots\ldots = 3,85853720$$
$$\log(1+r) = \log(1,05) = 0,021189299$$
$$n\log(1+r) = 33\log(1,05) \ldots\ldots 0,69924687$$
$$\log C = \ldots\ldots 3,15929033,$$

откуда

$$C = 1443,08 \text{ фр.}$$

Эта сумма вмѣстѣ съ процентами, по 5 на 100, обратится черезъ 33 года въ 7220 фр.

Примѣръ IV.—*Капиталъ въ 28895 фр. по истеченіи 73 лѣтъ обратился въ 250000 фр. Изъ сколькихъ процентовъ онъ былъ помѣщенъ?*

Формула (5) даетъ:

$$\log(1+r)=\frac{\log A-\log C}{n}.$$

$$\log A=\log 250000=5,3979400$$

$$\log C=\log\ 28895=4,4608227$$

$$\log A-\log C=0,9371173;$$

$$\log(1+r)=0,01283722,$$

откуда

$$1+r=1,03000.$$

Итакъ, капиталъ былъ помѣщенъ по 3%.

Примѣръ V.—*Во сколько времени капиталъ въ 7700 фр. обратится въ 42850 фр., будучи отданъ по 4 процента въ годъ?*

Пользуемся формулою (6):

$$n=\frac{\log A-\log C}{\log(1+r)}.$$

$$\log A=\log 42850=4,6319508$$

$$\log C=\log\ 7700=3,8864907$$

$$\log A-\log C=0,7454601,$$

$$\log(1+r)=\log(1,04)=0,0170333.$$

Слѣдовательно, n представляетъ цѣлую часть частнаго $\frac{0,7454601}{0,0170333}$. Находимъ:

$$n=43 \text{ годамъ} \quad \text{и} \quad R=0,0130282$$

Далѣе, по формулѣ (8):

$$\log\left(1+\frac{kr}{t}\right)=0,0130282,$$

и, значитъ,

$$1+\frac{kr}{t}=1,030453,$$

откуда

$$\frac{kr}{t}=0,030453 \quad \text{и} \quad k=\frac{0,030453\,.\,365}{0,04}=278.$$

Итакъ, искомое время равно 43 годамъ и 278 днямъ.

II. Срочныя уплаты

§ 403. Опредѣленіе. — Нѣкто занимаетъ сумму C на n лѣтъ по r процентовъ съ 1 франка; въ уплату долга онъ въ концѣ каждаго года вноситъ опредѣленную сумму a, высчитанную такимъ образомъ, что послѣ n уплатъ, равныхъ a, занятая сумма будетъ погашена вмѣстѣ съ причитающимися сложными процентами. Сумма a, выплачиваемая такимъ образомъ ежегодно, называется *срочною уплатою* (*annuité*).

§ 404. Общая формула сречныхъ уплатъ.—Найдемъ формулу, связывающую капиталъ C, срочную уплату a, прибыль за годъ съ одного франка r и время n, на какое сдѣланъ заёмъ.

Первый методъ.—Если бы должникъ погасилъ сэой долгъ сразу въ концѣ n-го года, то ему пришлось бы внести $C(1+r)^n$ (**§ 399**). Но онъ уплачиваетъ въ концѣ перваго года первую сумму a, которая черезъ $(n-1)$ лѣтъ обратилась бы въ $a(1+r)^{n-1}$; слѣдовательно, уплатить въ концѣ перваго года сумму a все равно, что въ концѣ n-го уплатить сумму $a(1+r)^{n-1}$. Точно также сумма a, уплачиваемая въ концѣ второго года, равносильна суммѣ $a(1+r)^{n-2}$, уплачиваемой въ концѣ n-го года; сумма a, уплачиваемая въ концѣ предпослѣдняго года, равносильна суммѣ $a(1+r)$, уплачиваемой въ концѣ всего срока; наконецъ, уплачивая сумму a въ концѣ n-го года, мы погашаемъ остатокъ долга. Слѣдовательно, у насъ будетъ уравненіе

$$C(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a.$$

Замѣчаемъ, что вторая часть, будучи написана въ обратномъ порядкѣ, представитъ геометрическую возрастающую прогрессію, первый членъ которой есть a, а знаменатель $(1+r)$; поэтому, прилагая фомулу (7) **§ 347**-го, будемъ имѣть:

$$C(1+r)^n = \frac{a(1+r)^n - a}{r},$$

или, по освобожденіи отъ знаменателя r,

$$a[(1+r)^n - 1] = Cr(1+r)^n. \qquad (1)$$

Такова общая формула срочныхъ уплатъ.

§ 405. Второй методъ.—Эту формулу можно получить и другимъ путемъ. Должникъ, занявъ сумму C, въ концѣ перваго года будетъ долженъ уже $C(1+r)$; возвращая сумму a, онъ остается долженъ $C(1+r)-a$. Къ концу второго года эта сумма увеличится на проценты за годъ, т.-е. обратится въ $[C(1+r)-a](1+r)$, или $C(1+r)^2-a(1+r)$; но, уплачивая новую сумму a, должникъ сокращаетъ свой долгъ до $C(1+r)^2-a(1+r)-a$. Очевидно, что къ концу третьяго года долгъ, увеличившійся на проценты за годъ и уменьшившійся на новую срочную уплату a, будетъ $C(1+r)^3-a(1+r)^2-a(1+r)-a$; къ концу же n-го года онъ будетъ равенъ

$$C(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-\dots-a(1+r)-a.$$

А такъ какъ къ этому сроку онъ долженъ обратиться въ нуль, то предыдущее выраженіе необходимо равняется нулю, т.-е.

$$C(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}+\dots+a(1+r)+a,$$

какъ и при первомъ методѣ.

§ 406. Замѣчаніе.—Можно, наконецъ, притти къ формулѣ (1), не суммируя геометрической прогрессіи. Дѣйствительно, предположимъ, что нѣкто беретъ взаймы сумму $\frac{a}{r}$ на n лѣтъ; каждый годъ онъ долженъ уплачивать простые проценты $\frac{a}{r}\times r=a$ и въ концѣ срока долженъ еще возвратить взятую сумму $\frac{a}{r}$. Предположимъ, что эти проценты ежегодно, въ моменты уплаты, передаются третьему лицу, обязанному помѣщать ихъ по сложнымъ процентамъ; это лицо получитъ такимъ образомъ по годовымъ уплатамъ n суммъ, равныхъ a; по истеченіи n лѣтъ оно будетъ имѣть всю ту сумму, на которую *возрастаетъ* капиталъ $\frac{a}{r}$ за это время. Но это увеличеніе капитала равно $\frac{a}{r}(1+a)^n-\frac{a}{r}$ и представляетъ совокупность всѣхъ срочныхъ уплатъ; а такъ какъ по условію послѣдними погашается весь долгъ, то мы должны имѣть:

$$\frac{a}{r}(1+r)^n-\frac{a}{r}=C(1+r)^n;$$

эта формула ничѣмъ не отличается отъ уравненія (1).

§ 407. Задачи.—Формула (1) служитъ для рѣшенія четырехъ различныхъ задачъ въ зависимости отъ того, какую изъ четырехъ входящихъ въ нее буквъ мы примемъ за неизвѣстную.

1. *Какова должна быть вносимая въ концѣ каждаго года сумма a, чтобы можно было погасить въ теченіи n лѣтъ домъ C вмѣстѣ съ сложными процентами, считая по r процентовъ съ 1 франка въ теченіи одного года?* Формула (1) даетъ:

$$a = \frac{Cr(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}. \tag{2}$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, вычисляемъ сначала $(1+r)^n$ при помощи логариѳмовъ, изъ результата вычитаемъ единицу и получаемъ знаменатель. Затѣмъ, по формулѣ

$$\log a = \log Cr + n\log(1+r) - \log[(1+r)^n - 1]$$

вычисляемъ $\log a$ и, наконецъ, само a.

2. *Какую можно занять сумму C на такихъ условіяхъ: погасить ее въ теченіи n лѣтъ n срочными (годовыми) уплатами, равными a, считая по r процентовъ съ 1 франка въ теченіи одного года?* Формула (1) даетъ:

$$C = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r(1+r)^n}. \tag{3}$$

Это выраженіе можетъ быть вычислено при помощи логариѳмовъ такимъ же образомъ, какъ и предыдущее.

3. *Занимаютъ сумму C по сложнымъ процентамъ, считая по r процентовъ съ 1 франка въ теченіи одного года. Во сколько времени она будетъ погашена срочными (годовыми) уплатами, равными a?* Рѣшая уравненіе (1) относительно $(1+r)^n$, находимъ:

$$(1+r)^n = \frac{a}{a - Cr},$$

откуда

$$n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)}. \tag{4}$$

Задача возможна только тогда, когда $(a - Cr)$ положительно, такъ какъ отрицательныя числа не имѣютъ вещественныхъ логариѳмовъ. Да и *à priori* можно видѣть, что это должно быть такъ:

съ одной стороны, Cr представляетъ простые проценты съ занятаго капитала, а съ другой стороны, очевидно, что ежегодная уплата a должна быть больше этихъ процентовъ, чтобы возможно было погасить долгъ.

Если формула (4) даетъ для n цѣлое число, то это число и рѣшаетъ вопросъ. Если же дѣленіе не выполняется точно, то задача невозможна. Однако, можно показать, что въ этомъ случаѣ, *обозначая черезъ p и $(p+1)$ два послѣдовательныхъ цѣлыхъ числа, между которыми содержится дробь* (4), *найдемъ, что p лѣтъ недостаточно, а $(p+1)$ много для погашенія долга срочными (годовыми) уплатами.* Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ

$$p < \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)} < p + 1,$$

откуда

$$p\log(1+r) < \log a - \log(a - Cr) < (p+1)\log(1+r),$$

или

$$\log(1+r)^p < \log\frac{a}{a - Cr} < \log(1+r)^{p+1},$$

то

$$(1+r)^p < \frac{a}{a - Cr} < (1+r)^{p+1}.$$

Знаменатель — положительный; слѣдовательно, освобождаясь отъ него, получимъ:

$$(a - Cr)(1+r)^p < a < (a - Cr)(1+r)^{p+1},$$

откуда легко находимъ

$$\frac{a[(1+r)^p - 1]}{r} < C(1+r)^p,\ \frac{a[(1+r)^{p+1} - 1]}{r} > C(1+r)^{p+1}.$$

Эти два неравенства и доказываютъ высказанную теорему.

Слѣдовательно, формула (4) прилагается во всѣхъ случаяхъ; по ней мы находимъ число p срочныхъ (годовыхъ) уплатъ; если есть остатокъ, то безъ труда опредѣляется сначала разность $C(1+r)^p - \frac{a[(1+r)^p - 1]}{r}$, составляющая долгъ къ началу $(p+1)$-го года, а затѣмъ ее дѣлаютъ предметомъ или особой уплаты, или отдѣльнаго соглашенія.

4. *Требуется погасить занимаемую сумму C вмѣстѣ съ причитающимися сложными процентами въ теченіи n лѣтъ срочными (годовыми) уплатами, равными a. Изъ сколькихъ процентовъ сдѣланъ заёмъ?*

Формула (1) представляетъ уравненіе $(n+1)$-ой степени относительно r, которое можетъ быть рѣшено только частными пріемами. Можно быстро найти приближенное значеніе r, основываясь на слѣдующемъ замѣчаніи.

Когда C и a даны, то число n срочныхъ (годовыхъ) уплатъ увеличивается и уменьшается вмѣстѣ съ увеличеніемъ и уменьшеніемъ r. Чтобы убѣдиться въ этомъ, достаточно обратиться ко второму методу § 405-го, гдѣ выводится общая формула срочныхъ уплатъ. Въ самомъ дѣлѣ, долгъ въ концѣ перваго года, $C(1+r)-a$, тѣмъ больше, чѣмъ больше r; то же имѣетъ мѣсто и въ концѣ каждаго тода, такъ какъ каждый разъ предыдущій долгъ умножается на $(1+r)$ и полученное произведеніе уменьшается на постоянное количество a. Поэтому, если для погашенія долга достаточно произвести n уплатъ при нѣкоторой величинѣ r годовыхъ процентовъ, то этихъ уплатъ потребуется больше, если будутъ повышены годовые проценты.

Замѣтивъ это, возвратимся къ формулѣ (1), представивъ ее въ видѣ:

$$n=\frac{\log a-\log(a-Cr)}{\log(1+r)}; \tag{4}$$

здѣсь r неизвѣстно. Если дадимъ r нѣкоторое произвольное значеніе r' и оно будетъ меньше искомаго, то соотвѣтственное значеніе n' дроби (4) будетъ меньше даннаго значенія n; наоборотъ, оно будетъ больше n, если r' больше r. Итакъ, сравнивая n и n', мы узнаёмъ, будетъ ли значеніе, произвольно приписываемое r, велико или мало, а затѣмъ, при помощи нѣкоторыхъ надлежащихъ соображеній, можно быстро получить достаточно приближенное значеніе r.

§ 408. Численныя приложенія. Примѣръ I.—*Какова должна быть ежегодная уплата, чтобы погасить въ теченіи 51 года долгъ въ 34600 фр., считая по 4 процента сложныхъ?*

Изъ формулы (2) выводимъ:

$$\log a=\log Cr+n\log(1+r)-\log[(1+r)^n-1].$$

$$\log(1+r)=\log(1{,}04)=0{,}0170333393$$

$$n\log(1+r)=51\ \log(1{,}04)=0{,}8687003,$$

откуда

$$(1+r)^n = 7,390950.$$

Далѣе,

$$\log Cr = \log 1384 \ldots = 3,1411361$$
$$n\log(1+r) = \ldots = 0,8687003$$
$$\log[(1+r)^n - 1] = \log 6,39095 = 0,8055654$$
$$\text{Доп. } \log[(1+r)^n - 1] - 10 = \ldots = \bar{1},1944346$$
$$\log a = \ldots = 3,2042710;$$

слѣдовательно,

$$a = 1600,556 \text{ фр.}$$

Примѣръ II.—*Въ началѣ каждаго года вносятъ по 50 фр., какая образуется сумма x по истеченіи 24 лѣтъ, считая по 6%?*

Имѣемъ формулу

$$x = \frac{a[(1+r)^{n+1} - (1+r)]}{r}.$$

$$\log(1+r) = \log(1,06) = 0,0253058653$$
$$(n+1)\log(1+r) = 25\log(1,06) = 0,6326466,$$

откуда

$$(1+r)^{n+1} = 4,29187,$$

но

$$1+r = 1,06,$$

слѣдовательно,

$$(1+r)^{n+1} - (1+r) = 3,23187.$$

Далѣе,

$$\log a = \log 50 = 1,6989700$$
$$\log[(1+r)^{n+1} - (1+r)] = \log 3,23187 = 0,5094539$$
$$\text{Доп. } \log r - 10 = \text{Доп. } \log 0,06 - 10 = 1,2218488$$

$$\log x = 3,4302727;$$

слѣдовательно,

$$x = 2693,225 \text{ фр.}$$

Примѣръ III. — *Какую сумму можно занять на слѣдующихъ условіяхъ: погасить ее въ теченіи 37 лѣтъ срочными (годовыми) уплатами по 825 фр., считая по $4\frac{1}{2}$ процента?*

По формулѣ (3) находимъ:

$$\log C = \log a + \log[(1+r)^n - 1] - \log(1+r)^n - \log r.$$
$$\log(1+r) = \log(1,045) = 0,01911629$$
$$n\log(1+r) = 37\log(1,045) = 0,7073027,$$

откуда

$$(1+r)^n = 5,09686.$$

Далѣе,

$$\log a - \log 825 = 2{,}9164540$$
$$\log[(1+r)^n - 1] = \log 4{,}09686 = 0{,}6124512$$
$$\text{Доп.} \log(1+r)^n - 10 = \;.\;.\;.\;.\; = \overline{1}{,}2926973$$
$$\text{Доп.} \log r - 10 = \text{Доп.} \log 0{,}045 - 10 = 1{,}3467875$$

$$\log C = 4{,}1683900,$$

откуда

$$C = 14736{,}35 \text{ фр.}$$

Примѣръ IV.—*Во сколько времени можно погасить долгъ въ* 260000 *фр., считая по* $3^1/_4$ *процента, срочными уплатами по* 10000 *фр. въ концѣ каждаго года.*

Пользуемся формулою (4)

$$n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1+r)};$$

$$\log a = \log 10000 = 4$$
$$\log(a - Cr) = \log 1550 = 3{,}1903317$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0{,}8096683$$
$$\log(1+r) = \log(1{,}0325) = 0{,}0138901;$$

слѣдовательно,

$$n = \frac{0{,}8096683}{0{,}0138901} = 58\;.\;.\;.$$

Такимъ образомъ надо произвести 58 срочныхъ уплатъ по 10000 фр. Но такъ какъ послѣ дѣленія получается остатокъ, то весь долгъ не будетъ погашенъ. Чтобы закончить счетъ, надо вычислить, съ одной стороны, во что обратится долгъ по истеченіи 58 лѣтъ, т.-е. найти $s = 260000 \times (1{,}0325)^{58}$, съ другой, какая часть долга будетъ погашена произведенными уплатами, т. е. вычислить

$$p = \frac{10000 \times [(1{,}0325)^{58} - 1]}{0{,}0325}$$

и найти разность $(s - p)$.

$$\log 260000 = 5{,}41497335 \qquad \log 10000 = 4$$
$$58 \log(1{,}0325) = 0{,}80562348 \qquad \log 5{,}391804 = 0{,}7317341$$
$$\log s = 6{,}22059683 \qquad \text{Доп.} \log 0{,}0325 - 10 = 1{,}4881166$$
$$\log p = 6{,}2198507,$$

откуда $s = 1661869$ фр. $p = 1659017$ фр.

Кромѣ того $(1{,}0325)^{58} = 6{,}391804$.

Слѣдовательно, оставшаяся сумма $(s - p) = 2852$ фр

Примѣръ V.—*Долгъ въ 35000 фр. вмѣстѣ съ сложными процентами погашается въ 52 года срочными уплатами по 1600 фр., производимыми въ концѣ каждаго года. Опредѣлить величину годового процента.*

Пользуемся формулою (4)

$$n = \frac{\log a - \log(a - Cr)}{\log(1 + r)}.$$

Полагая сначала $r = 0{,}04$, находимъ $a - Cr = 200$.

$$\log a = \log 1600 = 3{,}2041200$$
$$\log(a - Cr) = \log 200 = 2{,}3010300$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0{,}9030900;$$
$$\log(1 + r) = \log(1{,}04) = 0{,}0170333.$$

Дѣля 0,9030900 на 0,0170333, найдемъ въ частномъ число 53, которое больше 52. Слѣдовательно, искомый процентъ меньше 4

Далѣе, положимъ $r = 0{,}035$, тогда $a - Cr = 375$.

$$\log a = \log 1600 = 3{,}2041200$$
$$\log(a - Cr) = \log 375 = 2{,}5740313$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0{,}6300887;$$
$$\log(1 + r) = \log(1{,}035) = 0{,}0149403.$$

Дѣля 0,6300887 на 0,0149403, находимъ въ частномъ число 42, которое значительно меньше 52. Слѣдовательно, величина годового процента ближе къ 4, чѣмъ къ $3\frac{1}{2}$.

Положимъ далѣе $r = 0{,}039$; тогда $a - Cr = 235$

$$\log a = \log 1600 = 3{,}2041200$$
$$\log(a - Cr) = \log 235 = 2{,}3710679$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0{,}8330521;$$
$$\log(1 + r) = \log(1{,}039) = 0{,}0166155.$$

Частное отъ дѣленія 0,8330521 на 0,0166155 равно 50; оно слишкомъ мало, и потому годовой процентъ больше 3,90.

Пусть, далѣе, $r = 0{,}0395$; тогда $a - Cr = 217{,}50$.

$$\log a = \log 1600 = 3{,}2041200$$
$$\log(a - Cr) = \log 217{,}50 = 2{,}3374593$$

$$\log a - \log(a - Cr) = 0{,}8666607;$$
$$\log(1 + r) = \log(1{,}0395) = 0{,}0168245.$$

Частное отъ дѣленія 0,8666607 на 0,0168245 равно 51; слѣдовательно, годовой процентъ больше 3,95 фр.: онъ содержится между 3,95 фр. и 4 фр. Итакъ, мы нашли его съ точностью до 0,05 фр.; продолжая такимъ же образомъ дальше, мы можемъ опредѣлить его съ какою-угодно точностью.

§ 409. Случай вѣчныхъ рентъ. — Величина срочной (годовой) уплаты a, назначенной для погашенія долга C въ теченіи даннаго времени n, уменьшается съ увеличеніемъ n. Дѣйствительно, дѣля числитель и знаменатель формулы (2) на $(1+r)^n$, мы можемъ написать:

$$a = \frac{Cr}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}};$$

отсюда же мы видимъ, что чѣмъ больше n, тѣмъ меньше $\frac{1}{(1+r)^n}$ и тѣмъ больше знаменатель; слѣдовательно, тѣмъ меньше значеніе a. Поэтому, если срокъ уплаты все болѣе и болѣе отдаляется, т.-е. если n все болѣе и болѣе возрастаетъ, то значеніе a уменьшается, оставаясь постоянно больше Cr, такъ какъ знаменатель меньше единицы; предѣломъ для a будетъ Cr, т.-е. простые проценты съ одолженной суммы. Это—случай вѣчной ренты.

УПРАЖНЕНІЯ

I. Капиталъ въ 8500 франковъ помѣщенъ по $4\frac{1}{2}$%. Во что онъ обратится по истеченіи 41 года?

Отв. 51663фр.,86.

II. Народонаселеніе въ 200000 душъ увеличивается въ теченіи года на $1\frac{1}{4}$%. Какъ оно возрастетъ въ теченіи столѣтія?

Отв. 692681.

III. По истеченіи какого времени капиталъ въ 3500 франковъ, будучи отданъ по 5%, обратится въ такую же сумму, какъ и капиталъ въ 4300 франковъ, отданный на 18 лѣтъ по 4%?

Отв. По истеченіи 18 лѣтъ и 75 дней.

IV. Два капитала помѣщены по сложнымъ процентамъ: одинъ въ 38000 франковъ по $4\frac{1}{2}$%, а другой въ 99398 фр. по $3\frac{1}{2}$%. Черезъ сколько времени они обратятся въ одну и ту же сумму?

Отв. Черезъ 100 лѣтъ.

V. Какой капиталъ дастъ ежегодную ренту въ 1500 франковъ въ продолженіи 36 лѣтъ по 5 %, при чемъ въ первый разъ выдача должна произойти черезъ годъ?

Отв. Формула будетъ такая: $A = \frac{1500 \cdot [(1{,}05)^{36} - 1]}{(1{,}05)^{36} 0{,}05}$; она дастъ 24820 фр., 32.

VI. Требуется выплатить долгъ въ 25000 франковъ въ 7 равныхъ годовыхъ сроковъ, считая по 4 %. Какова должна быть ежегодная уплата?

Отв. 4165фр.,16.

VII. По сколько нужно вносить ежегодно, чтобы въ 48 лѣтъ погасить долгъ въ 36000 франковъ, считая по $3\frac{3}{4}$ %?

Отв. По 1628фр.,14.

VIII. Пріобрѣтена рента въ 3000 франковъ за 91650 франковъ. Черезъ сколько лѣтъ она станетъ получаться, считая по 3 %?

Отв. Черезъ 84 года.

IX. Сколько нужно уплатить сразу вмѣсто ежегодныхъ уплатъ въ концѣ каждаго года въ теченіи 24 лѣтъ, считая по 5 %, при чемъ первая уплата—въ 1000 франковъ, а остальныя возрастаютъ въ геометрической прогрессіи со знаменателемъ $\frac{11}{10}$? Вычислить послѣднюю уплату.

Отв. Формула будетъ такая:

$$S = \frac{a}{1+r} \cdot \frac{\left(\frac{q}{1+r}\right)^n - 1}{\frac{q}{1+r} - 1},$$

гдѣ $a = 1000$, $q = \frac{11}{10}$, $r = 0{,}05$, $n = 24$.

Находимъ $S = 50817$фр.,41. Послѣдняя уплата равна 8954фр.,30.

X. Рабочій въ началѣ каждой недѣли вноситъ въ сберегательную кассу сумму, равную a, въ продолженіи n лѣтъ. Какова по истеченіи этого времени стоимость M его книжки, считая проценты по r на 1 франкъ, при чемъ прибыль прикладывается въ концѣ каждаго года?

Отв.

$$M = a\left(52 + \frac{53r}{2}\right) \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

XI. Нѣкто вносить въ банкъ сумму v въ началѣ каждаго года въ продолженіи n лѣтъ. Спрашивается, по скольку можно будетъ вкладчику вынимать въ началѣ каждаго года въ теченіи слѣдующихъ $2n$ лѣтъ, если вполнѣ исчерпать свои сбереженія.

Отв.

$$a = \frac{v(1+r)^{3n}}{(1+r)^n + 1},$$

здѣсь a обозначаетъ искомую сумму.

XII. Условія тѣ же самыя, что и въ предыдущей задачѣ; каково должно быть число n, чтобы сумма a равнялась, по крайней мѣрѣ, k разъ взятой суммѣ v.

Отв. Искомое условіе будетъ такое:

$$(1+r)^n \geqq \frac{k + \sqrt{k(k+4)}}{2},$$

откуда можно вывести низшій предѣлъ для n.

КОНЕЦЪ ПЕРВОЙ ЧАСТИ

ОПЕЧАТКИ

Стран.	Строка	Напечатано:	Должно быть:
74	15 сверху	выраженія по самому	выраженія, по самому
114	6 снизу	, (3)	(3),
159	11 снизу	члены, по этому	члены по этому
160	11 „	$\frac{a+b+c+d+.}{n}$	$\frac{a+b+c+d+\ldots}{n}$
246	*чертежъ*		*Точка Н должна быть точкою касанія.*
309	2 снизу	*чиселъ;*	*чиселъ.*
313	4 „	второй	вторая